DICCIONARIO DE NÚMEROS CURIOSOS E INTERESANTES

David Wells

David Wells

Diccionario de números curiosos e interesantes

Versión en español: Sargont (2019)

Contenido

Introducción

Los números han ejercido su fascinación desde los albores de la civilización. Pitágoras descubrió que la armonía musical dependía de las proporciones de pequeños números enteros, y concluyó que todo en el universo era Número. Arquímedes le prometió al tirano Gelón que calcularía el número de granos de arena necesarios para llenar completamente el universo, y así lo hizo.

Dos mil años más tarde, Karl Friedrich Gauss comentó que ‘en aritmética, los teoremas más elegantes surgen a menudo experimentalmente como resultado de un golpe de buena fortuna más o menos inesperado, mientras que sus pruebas yacen tan profundamente arraigadas en la oscuridad que derrotan las investigaciones más agudas’.

Leopold Kronecker dijo que ‘Dios mismo hizo los números enteros: todo lo demás es obra del hombre’.

Ninguna otra rama de las matemáticas ha sido tan querida por los aficionados, porque en ningún otro lugar se descubren tan fácilmente las gemas justo debajo de la superficie, con la ayuda de las calculadoras de bolsillo y los ordenadores. Sin embargo, ninguna otra rama ha atrapado y derrotado a tantos grandes matemáticos, ni los ha llevado a sus mayores triunfos.

Este es un diccionario elemental. Presenta una multitud de hechos, en lenguaje sencillo, evitando anotaciones y símbolos complicados. El Glosario explica algunos términos básicos. Otros son explicados donde se presentan. Los nombres entre corchetes reconocen al descubridor original o, en algunos casos, al primer informante conocido de un hecho en particular.

Las tablas en la parte posterior son para el beneficio de los lectores que no pueden esperar para buscar sus propios patrones y propiedades. Las computadoras y las calculadoras, por supuesto, pueden producir fácilmente tablas más extensas; de hecho, son una ayuda indispensable para cualquier persona que tenga un rompecabezas numérico moderno y que no sea un prodigio calculador.

Uno de los encantos de las matemáticas es que las buenas matemáticas nunca mueren. Puede que se desvanezca de la vista, pero no es arrasada por descubrimientos posteriores.

La física de Aristóteles era primitiva y rudimentaria. Las matemáticas de Arquímedes aún brillan con luz propia. He dado crédito a los creadores de las propiedades e ideas más importantes, cuando éstas son conocidas, y una tabla cronológica ofrece alguna perspectiva sobre estas figuras históricas.

Sería imposible acreditar todas las fuentes de cada uno de los elementos a los que se hace referencia. Este no es un compendio de erudición histórica. He dado prioridad a los descubridores, donde se conocen, y a las fuentes, donde éstas son únicas a mi leal saber y entender, de las propiedades más sorprendentes e inusuales, solamente. También he dado detalles de textos a los que estoy muy agradecido por algunas de las entradas más largas.

En contraste con un diccionario de palabras, no siempre ha sido obvio dónde se debe ingresar una propiedad en particular. ¿Es el hecho de que 52 = 32 + 42 una propiedad de 5, o de 25? En términos generales, si el número mayor no se puede calcular fácilmente, la entrada se encuentra debajo del número menor. Por lo tanto, busque las propiedades de 1445 bajo 144.

Búsquedas más generales, por ejemplo, de sumas de cubos, pueden hacerse usando el Índice.

Cientos de libros y revistas han sido rastreados en busca de números curiosos e interesantes. Si falta una propiedad en particular, puede ser que no haya lugar para ella, o puede ser pura ignorancia por mi parte. Las correcciones y sugerencias para entradas adicionales serán bienvenidas, aunque no puedo prometer responder a las cartas personalmente. Todos los nuevos materiales utilizados en futuras ediciones serán reconocidos.

D.W.
Julio 1985

No se han añadido nuevas entradas a esta reimpresión de 1987. Sin embargo, desde la edición de 1986 se han hecho algunas correcciones y se han eliminado algunas ambigüedades e imprecisiones. Quisiera agradecer a J. Bryant, J. G. D. Carpenter, Stephen J. Harber, Chris Hawkins, David C. Maxwell, Roy S. Moore, Ean Wood y James R. Wood por sus comentarios y sugerencias, a David Willey por su discusión académica de la historia de los intentos de construcción de 17, 257 y 65.537-gonos, y especialmente a Tony Gardiner por su atención detallada al texto.

D.W.
Julio 1987

Una lista de Matemáticos en orden cronológico

Ahmes	c.1650 a.C.
Pitágoras	c.540 a.C.
Hipócrates	c.440 a.C.
Platón	c.430-c.349 a.C.
Hippias	c.425 a.C.
Theaetetus	c.417-369 a.C.
Archytas	c.400 a.C.
Xenocrates	396-314 a.C.
Teodoro	c.390 a.C.
Aristóteles	384-322 a.C.
Menaechmus	c.350 a.C.
Euclides	c.300 a.C.
Arquímedes	c.287-212 a.C.
Nicomedes	c.240 a.C.
Eratóstenes	c.230 a.C.
Diocles	c.180 a.C.
Hiparco	c.180-c.125 a.C.
Herón de Alejandría	c.15
Ptolemeo	c.85-c.165
Nicómaco de Gerasa	c.100
Teón of Esmirna	c.125
Diofante	1ra o 3ra centuria
Pappus	c.320
Iamblichus	c.325
Proclus	410-485
Tsu Ch'ung-Chi	430-501
Brahmagupta	c.628
Al-Khwarizmi	c.825
Thabit ibn Qurra	836-901
Mahavira	c.850
Bhaskara	1114-c. 1185
Leonardo de Pisa (Fibonacci)	c.l170-después 1240
al-Banna, Ibn	1256-1321
Chu Shih-chieh	±14th centuria-c. 1303
Pacioli, Fra Luca	c.1445-1517
Leonardo da Vinci	1452-1519

Durero, Alberto	1471-1528
Stifel, Michael	1486/7-1567
Tartaglia, Niccolo	c. 1500-1557
Cardano, Girolamo (Cardán)	1501-1576
Recorde, Robert	c.1510-1558
Ferrari, Ludovico	1522-1565
Viete, Francis	1540-1603
Ceulen, Ludolph van	1540-1610
Stevin, Simon	1548-1620
Napier, John	1550-1617
Cataldi, Pietro Antonio	1552-1626
Briggs, Henry	1561-1630
Kepler, Johannes	1571-1630
Oughtred, William	c. 1574-1660
Bachet, Claude-Gaspar, de Meziriac	1581-1638
Mersenne, Marin	1588-1648
Girard, Albert	c.1590-c.1633
Desargues, Girard	1591-1661
Descartes, René	1596-1650
Fermat, Pierre de	1601-1665
Brouncker, Lord William	c. 1620-1684
Pascal, Blaise	1623-1662
Huygens, Christian	1628-1695
Newton, Isaac	1642-1727
Leibniz, Gottfried Wilhelm	1646-1716
Bernoulli, Johann	1667-1748
Machin, John	1680-1751
Bernoulli, Niclaus	1687-1759
Goldbach, Christian	1690-1764
Stirling, James	1692-1770
Euler, Leonard	1707-1783
Buffon, Count Georges	1707-1788
Lambert, Johann	1728-1777
Lagrange, Joseph Louis	1736-1813
Wilson, John	1741-1793
Wessel, Caspar	1745-1818
Laplace, Pierre Simon de	1749-1827
Legendre, Adrien Marie	1752-1833
Nieuwland, Pieter	1764-1794
Ruffini, Paolo	1765-1822
Argand, Jean Robert	1768-1822
Gauss, Karl Friedrich	1777-1855
Brianchon, Charles	c. 1783-1864

Binet, Jacques-Philippe-Marie	1786-1856
Moebius, August Ferdinand	1790-1868
Babbage, Charles	1792-1871
Lame, Gabriel	1795-1870
Steiner, Jakob	1796-1863
de Morgan, Augustus	1806-1871
Liouville, Joseph	1809-1882
Shanks, William	1812-1882
Catalan, Eugene Charles	1814-1894
Hermite, Charles	1822-1901
Riemann, Bernard	1826-1866
Venn, John	1834-1923
Lucas, Eduard	1842-1891
Cantor, George	1845-1918
Lindemann, Ferdinand	1852-1939
Hilbert, David	1862-1943
Lehmer, D. N.	1867-1938
Hardy, G. H.	1877-1947
Ramanujan, Srinivasa	1887-1920

Glosario

BICUADRADO Un término anticuado para una cuarta potencia, un número multiplicado por sí mismo tres veces. $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$, y por lo tanto 10.000 es un bicuadrado.

COMPUESTO Un número compuesto es un número entero que tiene al menos un factor apropiado. $14 = 2 \times 7$, así como 14×1, es compuesto. 13, que sólo es igual a 13×1, no lo es; es primo.

CUADRADO El cuadrado de un número es el número multiplicado por sí mismo. Así 12 al cuadrado, escrito 12^2, $= 12 \times 12 = 144$.

CUBO Un número que es igual a otro número multiplicado por sí mismo dos veces. $216 = 6 \times 6 \times 6$, y por lo tanto 216 es un cubo. Ver CUADRADO PERFECTO.

CUADRADO PERFECTO Un entero que es el cuadrado de otro entero. En otras palabras, su raíz cuadrada es también un número entero. $25 = 5^2$ y $144 = 12^2$ son cuadrados perfectos. En este libro generalmente se da por sentado que CUADRADO significa CUADRADO PERFECTO, y de manera similar, CUBO significa CUBO PERFECTO y así sucesivamente.

DE LA FORMA Esta frase, REPRESENTADA COMO, se utiliza para indicar que un número es igual a una expresión de cierto tipo. Por ejemplo, todos los primos, excepto 2 y 3, son de la forma $6n \pm 1$, lo que significa que cada primo es 1 más o menos que un múltiplo de 6. 17 es de la forma $6n \pm 1$, porque de hecho es igual a $6 \times 3 - 1$.

DÍGITO Las cifras de 142857 son los números 1, 4, 2, 8, 5 y 7. Ocasionalmente se escribe un número con ceros iniciales, por ejemplo 07923. Cuando esto se hace, el cero inicial se ignora cuando se cuenta el número de dígitos, por lo que 07923 cuenta como un número de 4 dígitos.

DIVISOR Un entero que divide a otro entero exactamente. Los divisores de 10 son 10, 5, 2 y 1. divisor y factor son sinónimos en este diccionario.

DIVISOR APROPIADO (o FACTOR APROPIADO) Un divisor de un número que no es el número en sí mismo, o 1. Los divisores apropiados de 10 son 5 y 2, solamente.

ENTERO Un número completo, sin decimales o fracción.

FACTOR *Ver* DIVISOR.

FACTORIAL Factorial *n*, o *n* factorial, normalmente escrito *n*! y a menudo pronunciado 'n bang!' significa el producto $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5... \times (n - 1) \times n$. Por ejemplo, 6 factorial = $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

FRACCIÓN DE UNIDAD El recíproco de un entero. 1/13 y 1/28 son fracciones unitarias. 2/3 no lo es.

HIPOTENUSA Término griego que designa el lado más largo de un triángulo rectángulo, el opuesto al ángulo recto. En el conocido triángulo en ángulo recto 3-4-5, el lado de la longitud 5 es la hipotenusa.

IRRACIONAL Cualquier número real que no sea racional, y por lo tanto cualquier número que *no* pueda ser escrito como un decimal que termine o se repita. Los números $\pi = 3{,}14159265...$; $e = 2{,}7182818...$ y $\sqrt{2} = 1{,}41421...$ son todos irracionales.

MÚLTIPLO Un múltiplo de un entero es cualquier otro entero tal que dividido por el primer entero no tiene resto. Si P es un múltiplo de Q, entonces Q es un *factor* de P. Cualquier entero tiene infinitamente muchos múltiplos, porque puede ser multiplicado por cualquier otro entero.

NÚMERO TRASCENDENTAL Un número real que no satisface ninguna ecuación algebraica con coeficientes integrales, como $x^3 - 5x + 11 = 0$. Todos los números trascendentales son irracionales y pueden ser escritos, en teoría, como decimales no terminales, no repetitivos. La mayoría de los números irracionales son trascendentales.

PERMUTACIÓN Una permutación de una secuencia de objetos es sólo una reorganización de ellos, EBDCA es una permutación de ABCDE.

PERMUTACIÓN CÍCLICA Una permutación cíclica es cíclica si simplemente toma algunos objetos de un extremo y los transfiere, sin cambiar su orden, al otro extremo. CDEAB es una permutación cíclica de ABCDE.

POTENCIA/PODER En este libro, potencia será un término general para cuadrados, cubos y potencias superiores.

PRIMO Un número primo es un número entero mayor que 1 sin factores aparte de sí mismo y 1. 17 es primo porque los únicos números enteros que lo dividen sin resto son 17 y 1.

PRODUCTO El producto de varios números es el resultado de multiplicarlos todos juntos. El producto de los primeros cinco números primos es igual a $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11= 2310$.

RACIONAL Cualquier número que sea un entero o una fracción (la proporción de dos enteros). Todos los números racionales pueden escribirse como decimales que terminan o se repiten. Por ejemplo, $1/7 = 0{,}142857142857...$ y $1/8 = 0{,}125$. Ver IRRACIONAL.

RAÍZ La raíz cuadrada de un número n, escrita $\sqrt{n}$, es el número que debe multiplicarse por sí mismo para producir *n*. Desde $7 \times 7 = 49$, $\sqrt{49} = 7$. La raíz cúbica de un número *n*, escrita $\sqrt[3]{n}$ es el número que debe multiplicarse por sí mismo dos veces para producir *n*. Desde $5 \times 5 \times 5 = 125$, $\sqrt[3]{25} = 5$. La cuarta raíz y las raíces superiores (quinta raíz, sexta raíz, etc.) se definen de la misma manera. Por ejemplo, desde $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, la quinta raíz de 32, escrita $\sqrt[5]{32}$, = 2.

RECÍPROCO Sólo recíprocos de enteros son referidos en este diccionario. El recíproco de un número entero *n* es la fracción $1/n$.

REPRESENTADA COMO Esta frase, al igual que la DE LA FORMA, se utiliza para declarar que un número es igual a una expresión de cierto tipo. Por ejemplo, 25 se puede representar como la suma de dos cuadrados, porque $25 = 16 + 9$, y 16 y 9 son cuadrados. Ver DE LA FORMA.

$\varphi(n)$, es el número de enteros menor que *n*, y que no tiene ningún factor común con *n*. Así que $\varphi(13) = 12$, porque 13 es primo, y $\varphi(6) = 2$, porque los únicos números menos que 6 y primos para él son 1 y 5.)

$d(n)$ es el número de factores de *n*, incluyendo unidad y *n* mismo.

$\sigma(n)$, es la suma de todos los factores de n, incluyendo la unidad y n misma. Entonces $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

$\varphi(n)$ y $\sigma(n)$. Aparecen ocasionalmente en el texto. Las tres funciones se enumeran en la Tabla 8.

Bibliografía

Libros

Todos los siguientes libros contienen mucho material sobre números, y están disponibles en las librerías. Los marcados con * son más académicos.

No disponible, pero de mayor nivel que éste, es otro diccionario de François Le Lionnais: *Les nombres remarquables*, Hermann, Paris 1983.

Una guía magníficamente detallada de todos los aspectos de las matemáticas recreativas es *A Bibliography of Recreational Mathematics* de William L. Schaaf, publicada en los Estados Unidos por el National Council of Teachers of Mathematics en cuatro volúmenes en rústica.

BALL, W. W. R., and COXETER, H. S. M., *Mathematical Recreations and Essays*, University of Toronto Press, 1974

BEILER, ALBERT H., *Recreations in the Theory of Numbers*, Dover, New York, 1964

* DICKSON, L. E., *A History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Chelsea Publishing Co., New York, 1952

DUDENEY, H. E., *Amusements in Mathematics*, Nelson, London, 1951 (Other books of puzzles by Dudeney also contain some numerical material.)

GARDNER, MARTIN, *Mathematical Puzzles and Diversions*, Penguin, Harmondsworth, 1965

—, *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Penguin, Harmondsworth, 1966

—, *Martin Gardner's Sixth Book of Games from Scientific American*,

W. H. Freeman, San Francisco, 1971

—, *Mathematical Carnival*, Penguin, Harmondsworth, 1975

—, *Mathematical Circus*, Penguin, Harmondsworth, 1979

—, *Further Mathematical Diversions*, Penguin, Harmondsworth, 1981

—, *New Mathematical Diversions from Scientific American*, University of Chicago Press, Chicago, 1984
(Se advierte a los lectores que los libros de Gardner a menudo cambian de título al cruzar el Atlántico.)

* GUY, RICHARD K., *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981

HUNTER, J. A. H., and MADACHY, JOSEPH S., *Mathematical Diversions*, D. von Nostrand Co., New York, 1963

KORDEMSKY, BORIS A., *The Moscow Puzzles*, Penguin, Harmondsworth, 1976

KRAITCHIK, MAURICE, *Mathematical Recreations*, George Allen & Unwin, London, 1960

MADACHY, JOSEPH S., *Mathematics on Vacation*, Charles Scribner, New York, 1966

SLOANE, N. J. A., *Handbook of Integer Sequences*, Academic Press, New York, 1973

Revistas y diarios

Varias revistas y periódicos tienen columnas matemáticas - por ejemplo, Keith Devlin en *The Guardian* y Mike Mudge en *Personal Computer World*. *Scientific American* ahora tiene una Columna de Ordenador.

Para los lectores con una formación matemática, las puntuaciones de las revistas profesionales tienen material ocasional de interés recreativo. Los siguientes son especialmente prometedores:

Fibonacci Quarterly
Journal of Recreational Mathematics
Mathematics of Computation

Las bibliotecas también pueden tener conjuntos de dos revistas, que ya no existen: *Recreational Mathematics* y *Scripta Mathematical*, que no es tan oscura como sugiere su título.

Los diarios de los profesores de matemáticas son también una fuente fértil de ideas, y muchas escuelas y universidades producen sus propias revistas pequeñas. Por ejemplo, los estudiantes de la Universidad de Cambridge publican *Eureka* y *Quarch*, cuyo propósito es promover la discusión de problemas famosos, interesantes y sin resolver de carácter recreativo.

El Diccionario

–1 ; ***i***

Números negativos y complejos

A la edad de 4 años, Pal Erdös le comentó a su madre: ‘Si restas 250 de 100, obtienes 150 bajo cero’. Erdös ya podría multiplicar números de 3 y 4 dígitos juntos en su cabeza, pero nadie le había enseñado acerca de los números negativos. ‘Fue un descubrimiento independiente’, recuerda felizmente.[1]

Erdös creció hasta convertirse en un gran matemático, pero un sorprendente número de escolares sin su extraordinario talento responderá a la pregunta: ‘¿Cómo podría continuar esta secuencia? 8 7 6 5 4 3 2 2 1 0...?’ sugiriendo, ‘1 menos que nada’ o ‘menos 1, menos 2...!’.

Los niños en nuestra sociedad están flotando en números. Números enteros, fracciones, decimales, aproximaciones, estimaciones, números grandes que rompen récords, números minúsculos. El *Libro Guinness de los Récords* es un Libro de Números del siglo XX, incluyendo el mayor número de este Diccionario.

Hace unos pocos siglos, los números eran más pequeños, pocos y más sencillos. Rara vez era necesario contar más allá de unos pocos miles. La palabra griega miríada, que sugiere una vasta horda, era en realidad un mero 10.000, una cantidad suficiente para todo un ejército griego, pero para nosotros una escasa asistencia a un partido de fútbol del sábado.

Las fracciones a menudo se detenían en una doceava parte. Los comerciantes evitaban divisiones más finas dividiendo cada medida en medidas más pequeñas, y las medidas pequeñas en medidas aún más peque-

[1] John Tierney, Pal Erdös está en la ciudad. ‘Su cerebro está abierto’, *Science,* octubre de 1984.

ñas, sin llegar hasta las pulgas de Augusto de Morgan: 'Las pulgas grandes tienen pulgas pequeñas sobre sus espaldas para morder, y las pulgas pequeñas tienen pulgas menores, y así hasta el infinito'.

La concepción misma de los números que proceden al infinito, en cualquier dirección, apareció sólo en la imaginación de los teólogos y de los más grandes astrónomos y matemáticos, como Arquímedes, que agotaron un círculo con indefinidamente muchos polígonos y contaron los granos de arena necesarios para llenar el universo.

Para casi todos los demás, los números comenzaban en 1 y continuaban hacia arriba en estrictamente una sola dirección, no más allá de los ingeniosos sistemas de aritmética de dedos, o la tabla de conteo del empleado.

(El cero, una extraña y brillante invención india, no se usa para contar de todos modos. Los griegos no tenían idea de un número cero.)

Estas cifras eran sólidas y sustanciales. Para Pitágoras y sus seguidores un número era siempre un número de cosas. Ordenar un número como 16 en un patrón cuadrado de puntos era su idea de matemáticas avanzadas y abstractas.

Para los comerciantes también, los números cuentan las cosas.

Para los últimos griegos, los números eran todavía longitudes de líneas, áreas de figuras planas o volúmenes de sólidos. ¿Cómo es una esfera con un volumen –10?

¿Cómo podrían darle sentido a los números menores de cero?

Los primeros matemáticos a veces se topaban con números negativos, por así decirlo, en la oscuridad. Trataron de evitarlos, o fingieron que no estaban allí, que eran una ilusión.

Diofante fue un pionero en la teoría de números que todavía pensaba en un lenguaje fuertemente geométrico. Resolvió muchas ecuaciones que para nosotros tienen una raíz negativa y otra positiva. Aceptó lo positivo y rechazó lo negativo. Sabía que estaba allí, pero no tenía sentido.

Si una ecuación no tenía raíz positiva, él rechazaba la ecuación. $x + 10 = 5$ no era una ecuación apropiada.

Tal vez fue una desgracia para un teórico de los números nacer griego. Los indios no pensaban que las matemáticas fueran geometría.

Los matemáticos hindúes primero reconocieron las raíces negativas, y las dos raíces cuadradas de un número positivo, y multiplicaron los números positivos y negativos juntos, aunque también eran sospechosos.

Bhaskara comentó sobre la raíz negativa de una ecuación cuadrática: 'El segundo valor en este caso no debe ser tomado, porque es inadecuado; la gente no aprueba las raíces negativas'.

Por otro lado, los chinos ya habían descubierto números negativos para contar. En el siglo XII utilizaban libremente las barras de conteo rojas para las cantidades positivas y las barras negras para las negativas, exactamente lo contrario de nuestros estados de cuenta bancarios antes de la informatización. Sin embargo, no reconocieron las raíces negativas de las ecuaciones.

Como cualquier maestro de escuela reconocerá, un abismo separa el simple acto de contar hacia atrás de la idea de que los números negativos pueden ser operados de la misma manera que los números positivos (con un par de condiciones).

Cuántas generaciones de escolares nunca han progresado más allá del conjuro mágico, '¡Dos menos hacen una ventaja!'

Los artesanos no necesitan números negativos para medir hacia atrás a lo largo de una línea. Giran su regla, o la sostienen firmemente y caminan alrededor de la longitud que están midiendo.

Los comerciantes y los empleados de los bancos pueden hacer malabarismos fácilmente con los créditos y los débitos sin tener la menor idea de que están restando un número negativo de otro. Sus intenciones son honorablemente prácticas y concretas.

De hecho, hicieron una contribución práctica a la notación de las matemáticas. Nuestros conocidos signos más y menos se utilizaron por primera vez en los almacenes alemanes del siglo XV para indicar cuándo un contenedor estaba por encima o por debajo del peso estándar.[2]

Los teóricos de los números tenían un problema diferente. Se encontraron con números negativos totalmente desnudos, en abstracto. El número que cuando se suma a 10 hace 5 es sólo un número, ¿o es un número falso?

---

[2] Martin Gardner, 'Mathematical Games', *Scientific American*, junio de 1977.

Los matemáticos renacentistas eran tan desconfiados como Diofante o Bhaskara.

Michael Stifel habló de números que son ‘absurdos’ o ‘ficticios bajo cero’, que se obtienen restando números ordinarios de cero. Descartes y Pascal estuvieron de acuerdo.

Sin embargo, a principios del Renacimiento, uno de los problemas conocidos más difíciles eran las soluciones de las ecuaciones, que a menudo pedían soluciones negativas. Algunos matemáticos los aceptaron, e incluso dieron un gran paso adelante. Cardan era uno de ellos.

Las soluciones a las ecuaciones cuadráticas se conocían desde los griegos, aunque los matemáticos del Renacimiento continuaron reconociendo tres tipos diferentes, ilustrados por $x^2 = 5x + 6$; $x^2 + 5x = 6$, y $x^2 + 6 = 5x$. ¡Sin coeficientes negativos!

La ecuación cúbica era mucho más difícil.

Cardán, en su libro *El Gran Arte*, todavía presentaba el cubo en más de una docena de variedades diferentes, y las resolvía, utilizando una idea que tomó de Tartaglia.

Sin embargo, reconoció los números negativos e incluso se acercó a sus raíces cuadradas.

La primera raíz cuadrada del número negativo registrado, $\sqrt{(81 - 144)}$, está en el Stereometrica de Hero de Alejandría. Otro, $\sqrt{(1849 - 2016)}$ fue encontrado por Diofante como una posible raíz de una ecuación cuadrática. No los tomaron en serio. Tampoco los matemáticos europeos del siglo XV.

Cardán propuso el problema: dividir 10 en dos partes de tal manera que el producto sea 40.

Primero dijo que era obviamente imposible, pero luego lo resolvió de todos modos, dando correctamente las dos soluciones, $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$.

Concluyó diciendo al lector que ‘Estas cantidades son ‘verdaderamente sofisticadas’ y que seguir trabajando con ellas sería ‘tan sutil como inútil’.

¡Las raíces cuadradas de los números negativos! Si los números negativos fueran falsos, absurdos o ficticios, no es de extrañar que sus raíces cuadradas fueran descritas como ‘imaginarias’.

Incluso hoy en día, la teoría de los números complejos es uno de los varios obstáculos que se reconocen como separadores entre las matemáticas ‘elementales’ y las ‘avanzadas’.

La prueba más famosa de Pal Erdös es el teorema del número primo, que dice que si $\pi(x)$ es el número de primos que no excede x, entonces como x tiende al infinito,

$$\frac{\pi(x)\log x}{x}$$

tiende a 1.

Se probó originalmente en 1896 utilizando un análisis complejo. Aquí, ‘complejo’ no significa complicado, aunque lo fue, sino usando números complejos. Erdös publicó en 1949 una prueba que evitaba por completo los números complejos. Tal prueba se llama ‘elemental’. Aquí ‘elemental’ no significa fácil, ¡simplemente que *no* se usan números complejos!

John Wallis aceptó números negativos, pero escribió sobre números complejos, ‘Estas Cantidades Imaginarias (como son comúnmente llamadas) que surgen de la Supuesta Raíz de un Cuadrado Negativo (cuando suceden) se dice que implican que el Caso propuesto es Imposible’.

Wallis suena (si se me permite decirlo) cuando habla de números complejos (cuando lo hace) muy parecido a Bhaskara en números menores de cero.

Los matemáticos tenían razones para sospechar. Los números negativos, por excelencia^ - 1, poseen propiedades de las que carecen los números positivos.

Un amigo de Pascal, Antoine Arnauld, argumentó que si existen números negativos, entonces –1/1 debe ser igual a 1/–1, lo que parece afirmar que la proporción de una cantidad menor a una mayor es igual a la proporción de la misma cantidad mayor a la misma menor.

La mayoría de los adultos educados de hoy en día rechazarían esta idea después de un momento de reflexión. No es de extrañar que esta paradoja se discutiera en profundidad.

Los números complejos son aún más diabólicos. ¿Es √–1 menor o mayor que, digamos, 10? Ninguno de los dos, como se dio cuenta Euler. La idea misma de mayor o menor que se rompe, y tiene que ser reconstruida en una nueva forma, una forma que por cierto también resolverá la paradoja de Arnauld.

Afortunadamente, los números negativos y complejos funcionan, al igual que las barras rojas y negras de la calculadora, o los signos + y – del almacenista.

Los matemáticos se vieron obligados a aceptar números negativos e imaginarios, mucho antes de haber resuelto los enigmas que planteaban.

Euler usó audazmente $\sqrt{-1}$ en series infinitas, y publicó su exquisita fórmula, $e^{i\pi} = -1$. También introdujo la letra i para representar $\sqrt{-1}$.

Wessel, Argand y Gauss descubrieron independientemente alrededor de 1800 que los números complejos podían ser representados en un gráfico.

Cuando Gauss introdujo el término ‘número complejo’ y expresó números complejos como pares de números, su concepción moderna estaba casi completa.

F. Cajori, A History of Mathematical Notetions, 2 vols, Open Court, 1977 (reimpresión); G. Cardan, Ars Magna (1545); y Augustus de Morgan, A Budget of Paradoxes (1872).

0

Cero

Un número misterioso, que comenzó como un espacio en un tablero de conteo, se convirtió en un aviso escrito de que un espacio estaba presente, es decir, que algo estaba ausente, luego confundió a los matemáticos medievales que no podían decidir si realmente era un número o no, y alcanzó su más alto estatus en la matemática abstracta moderna, en la que los números se definen de todos modos sólo por sus propiedades, y las propiedades de cero son al menos tan claras, y bastante más sustanciales, que las de muchos otros números.

Los babilonios en el siglo II a.C. utilizaron un sistema de trabajo matemático y astronómico en el que el valor de un número dependía de su posición. Dos pequeñas cuñas indicaban que un lugar dentro de un número estaba desocupado, distinguiendo así 207 de 27. (270 se distinguió de 27 sólo por el contexto.)

No se sabe si este sistema babilónico se transmitió a las culturas vecinas.

Nuestro sistema, en el que el 0 es un número extra, se originó en la India. Se utilizó desde el siglo II a.C. para indicar un lugar vacío y como numeral en un libro de Bakhshali publicado en el siglo III.

El nombre sánscrito de cero era *sunya*, que significa vacío o en blanco, como lo hace hoy en día en algunos idiomas indios. Traducido por los árabes como *sifr*, con el mismo significado, se convirtió en el nombre europeo del cero, a través del latín *zephirum*, de diferentes maneras en diferentes países: *zero*, *cifre*, *cifra*, y las palabras inglesas *zero* y *cipher*.

En el año 773 d.C. apareció en la corte del Califa Al-Mansur en Bagdad un indio que trajo escritos sobre astronomía de Brahmagupta.

Esto fue leído por Al-Khwarizmi, el gran matemático árabe, cuyo nombre nos dio la palabra 'algoritmo' para un proceso aritmético y, más recientemente, para una clase más amplia de procesos como el uso de computadoras, y que escribió un libro de texto de aritmética en el que explicaba los nuevos números indios, publicado en el año 820 d.C.

En el otro extremo del mundo musulmán, en España a principios del siglo XII, fue traducido por Roberto de Chester. Esta traducción es la primera descripción conocida de los números indios en Occidente.

Existen varios registros del árabe, es decir, el indio, en los que se enseñan los números durante el próximo siglo y medio. Hacia 1240 se les enseñó incluso en un poema largo y no muy bueno. Sin embargo, se propagaron muy lentamente, por dos razones.

El sistema árabe no sólo añadía un cero útil a los antiguos números romanos; los alumnos también tenían que dominar los números árabes del 1 al 9, y el número cero era un rompecabezas en sí mismo.

¿El cero era un número? ¿Era un dígito? Si no significa nada, entonces seguramente no es nada. Pero como todo alumno sabe, si añades un cero inofensivo al final de un número, ¡lo multiplicas por 10! Nuestros diez dígitos se presentaban a menudo como los dígitos del 1 al 9, más el cero: 'Y hay nueve cifras que tienen valor... y una cifra más fuera de ellas que se llama nula, 0, que no tiene valor en sí misma, sino que aumenta el valor de los demás'.

El manuscrito del siglo XII del Monasterio de Salem había sonado como una nota platónica: ‘Cada número surge del Uno, y éste a su vez del Cero. En esto yace un gran y sagrado misterio’ aunque Platón comenzó con Uno y no sabía nada de ningún cero.

Los comerciantes y los contables tenían otra razón para dudar. Para evitar la manipulación de los registros escritos, se escribieron cantidades importantes de dinero en su totalidad, en cuyo caso los números indios no tienen ninguna ventaja, aunque eran útiles para el cálculo real.

Un paso decisivo lo dio el primer gran matemático del Occidente cristiano, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, que también figura en este diccionario como el descubridor de la secuencia de Fibonacci.

Leonardo da detalles de su vida en su libro más famoso, el *Liber Abaci*. El padre de Leonardo era el magistrado jefe de la colonia comercial pisana de Bugia, en Argelia. Leonardo pasó varios años en África, estudiando con un profesor musulmán. También viajó mucho a Grecia, Egipto y Oriente Medio.

Sin duda muchos comerciantes antes de Leonardo se habían dado cuenta de que los comerciantes con los que comerciaban utilizaban un sistema de números muy diferente.

Leonardo comparó los sistemas que conoció y concluyó que el sistema indio que había aprendido en África era, con mucho, el mejor.

En 1202, y en una edición revisada en 1228, publicó su Libro de Computación, el *Liber Abaci*, un compendio de casi todas las matemáticas conocidas entonces.

En él describía el sistema indio. Habiendo aprendido de él como hijo de un comerciante, describió su uso en la aritmética comercial, en el cálculo de proporciones y mezclas, y en el cambio de moneda.

El triunfo práctico final del cero y sus números indios llegó con la difusión del libro impreso y el ascenso de la clase mercantil.

Los libros de texto de aritmética estaban entre los más populares de los primeros libros impresos. Enseñaron a los hijos del comerciante las habilidades con números que se volvían cada vez más esenciales al mismo tiempo que daban el empujón final a los contadores y al tablero de conteo, y establecían los nuevos números.

Tomamos tan fácilmente el cero por sentado como un número, que es sorprendente considerar que los griegos no tenían ningún concepto de nada, o vacío, como un número, y doblemente curioso de que esto no les impidiera, ni a ellos ni a muchas otras culturas, crear matemáticas. Incluso cuando los griegos trataban los límites y las cantidades muy pequeñas, no tenían idea de una cantidad 'tendiendo a cero'. Era suficiente que la cantidad fuera menor que otra cantidad, o que pudiera ser tan pequeña como se deseara.

La familiaridad con el cero no agotó el interés de los matemáticos, que de todos modos tenían algunos problemas para manejar este extraordinario número.

Brahmagupta declaró que 'positivo o negativo dividido por cifra es una fracción con la del denominador'. A esto se le llamó 'la cantidad con cero como denominador'.

Mahavira escribió en su Compendio de Cálculos: 'Un número multiplicado por cero es cero y ese número permanece invariable, dividido por cero, sumado o disminuido por cero'. ¿Pensó en la división por cero como una resta repetida, que no tuvo ningún efecto?

El hecho de que el cero sumado a un número o restado de él no haya cambiado es un misterio directamente comparable a la negativa de los pitagóricos a aceptar el 1 como número, ya que no aumenta otros números por multiplicación.

Ambos hechos forman parte de la definición abstracta de un campo, de la cual los números ordinarios son un ejemplo. Un campo debe contener una 'identidad multiplicativa', normalmente etiquetada 1 con la propiedad de que si g es cualquier otro elemento del campo, entonces $1 \times g = g \times 1 = g$, y una 'identidad aditiva', normalmente etiquetada 0, con las propiedades que para cualquier g, $0 + g = g + 0 = g$, y la división por 0 está prohibida.

Al igual que la unidad, el 0 es excepcional en otros aspectos. Es un viejo rompecabezas para decidir lo que significa 0^0. Dado que a^0 es siempre 1, cuando a no es cero, seguramente por continuidad ¿también debería ser igual a 1 cuando a es cero?

¡No es así! 0^a es siempre 0, cuando a no es cero, así que, por el mismo argumento de continuidad, 0^0 debe ser igual a 0.

Los valores de funciones como 0! (factorial 0) se deciden convencionalmente para que tengan el máximo sentido y sean de máxima utilidad.

El bajo estatus de cero en algunas circunstancias es una gran ventaja para el afortunado matemático. Cuando Lander y Parkin buscaban sumas de 5 quintas potencias cuya suma era también una quinta potencia, una de sus soluciones incluía el número 05. Esta solución calificó inmediatamente, porque las potencias de 0 no cuentan por razones obvias, como una suma de 4 quintas potencias iguales a una quinta potencia, y destruyó una conjetura de Euler. (*Ver **144***.)

Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1969.

0,110001000000000000000001000000000000000000...

El número de Liouville, igual a $10^{-1'} + 10^{-2'} + 10^{-3'} + 10^{-4'} + ...$

Liouville demostró en 1844 que los números trascendentales existen en realidad mediante la construcción de varios, de los cuales éste es el más simple. Cantor demostró más tarde que casi todos los números son trascendentales.

0,12345678910111213141516171819202122...

Los dígitos de este número son los números naturales en secuencia. Como el número de Liouville, y π y *e*, es trascendental.

También es normal, es decir, ya sea que se exprese en base 10, o en cualquier otra base, cada dígito ocurre a largo plazo con la misma frecuencia. No se sabe si π y *e* son normales.

Las pruebas de las raíces cuadradas de los enteros 2 a 15 (excluidos 4, 9 y 16) en las bases 2, 4, 8 y 16, sugieren que también son normales.

Beyler, Metropolis y Neergaard, *Mathematics of Computation*, 24, 1970.

0,207 879 576 350 761 908 546 955...

El valor de i^i o $e^{\pi/2}$ (donde $i = \sqrt{-1}$).

Estas dos expresiones son iguales en la relación de Euler, $e^{i\pi} = -1$.

16/64

Cuando Denis el Burro reduce esta fracción cancelando los seises, obtiene la respuesta correcta, 1/4.

Sólo hay tres patrones similares con números menores a 100:

19/95 = 1/5   26/65 = 2/5   49/98 = 4/8

Todos estos son ejemplos de patrones más largos. Así 16666/66664 = 1/4 también. Hay muchas variaciones sobre este tema:

3544/7531 = 344/731   143185/17018560 = 1435/170560

$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}\ ;\ \frac{3^4+25^4+38^4}{7^4+20^4+39^4}=\frac{3+25+38}{7+20+39}$$

Alfred Moessner, *Scripta Maihemaica*, vols. 19 y 20.

0,301 029 995 663 981...

El logaritmo de 2 en base 10. Para calcular el número de dígitos en una potencia de 2, multiplique el índice por log 2 y tome el siguiente número entero más alto.

Así, el número 127 de Mersenne, 2^{127} – 1 tiene 39 dígitos porque 127 × 0,30103 = 38,23.

0,318 309 886 183 790 671 537 767 526 745 028 724 068 919 291 480 = π^{-1}

0,367 879 441 171 442 321 595 523 770 161 460 867 445 811 131 031 = e^{-1}

A medida que aumenta el número de cartas y sobres en el problema de las cartas con dirección errónea (*véase* ***44***, *Subfactorial*), la probabilidad de que cada carta se coloque en el sobre equivocado se acerca rápidamente a este valor límite.

El mismo problema puede ser simulado mezclando bien dos barajas de cartas, y descubriendo pares de cartas, una de cada una. La probabilidad de que no haya coincidencia entre los 52 pares es de aproximadamente e^{-1}.

0,434 294 481 903 251 827 651 128 918 916 605 082 294 397 005 803...

El logaritmo de *e* en la base 10.

0,5 = ½

Hay doce maneras en las que los dígitos del 1 al 9 pueden ser usados para escribir una fracción igual a 1/2.

6729/13458 tiene el numerador y denominador más pequeño, 9327/18654 el más grande.

El mismo rompecabezas puede ser resuelto para otras fracciones.

$$1/7 = 2637/18459$$

y la misma fracción con ambos números duplicados, 5274/36918.

$$4/5 = 9876/12345$$

Mitchell J. Friedman, Scripta Mathematica, vol. 8.

La suma $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$

también puede ser escrito como un producto infinito,

$$\zeta(s) = \frac{2^s}{2^s - 1} \times \frac{3^s}{3^s - 1} \times \frac{5^s}{5^s - 1} \times \frac{7^s}{7^s - 1} \times \frac{11^s}{11^s - 1} \times \ldots$$

en el que los numeradores son los poderes de los primos. Debido a esta relación, muchos problemas sobre la distribución de los números primos dependen del comportamiento de esta función.

Riemann conjeturó que, considerada como una función compleja con raíces complejas, todas sus raíces tenían una parte real igual a 1/2. Tan importante es esta posibilidad que se han publicado muchas pruebas matemáticas que asumen que la hipótesis de Riemann es cierta.

Esta profunda conjetura es generalmente considerada como el problema más sobresaliente en matemáticas hoy en día. Se sabe que las primeras 1,5 mil millones de raíces son de la forma conjeturada. Sin embargo, se conocen muchos fenómenos de este tipo en los que las tendencias de los números pequeños son engañosas.

En diciembre de 1984 se anunció que el matemático japonés Matzumoto, que trabajaba en París, finalmente lo había demostrado, pero su prueba era defectuosa. La hipótesis de Riemann sigue sin ser probada.

0,577 215 664 901 532 860 606 512 090 082 402 431...

γ, la constante de Euler, a veces llamada la constante de Mascheroni, calculada por Euler con 16 lugares y también llamada gamma por él en 1781.

Es el límite cuando *n* tiende a infinito de 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +... + 1/*n* – log *n*.

Ni siquiera se sabe si γ es irracional, y mucho menos si es trascendental, aunque se sabe que si es una fracción racional *a/b*, entonces *b* es mayor que $10^{10.000}$.

R. P. Brent, *Mathematics of Computation*, 31, 1977.

0,607 927 101...

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)^{-1}$$

Es la probabilidad de que, si dos números son elegidos al azar, no tendrán ningún factor común, y también la probabilidad de que un número elegido al azar no sea divisible por un cuadrado.

La única fracción ‘egipcia’ no representativa, ya que los egipcios sólo utilizaban fracciones unitarias, con esta única excepción. Todas las demás cantidades fraccionarias se expresaron como sumas de fracciones unitarias.

Del papiro de Rhind: Dividir 7 panes entre 10 hombres → Respuesta: 2/3 + 1/30.

Debido a que multiplicaban duplicando repetidamente, y luego sumando, usaban tablas de fracciones de unidades dobles. En el papiro Rhind hay una tabla que sube al doble 1/101.

2/7 = 1/4 + 1/28
2/11 = 1/6 + 1/66
2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776

Las fracciones egipcias son una fuente fértil de problemas. Por ejemplo, Erdös y Sierpinski han conjeturado, respectivamente, que 4/*n* y 5/*n* son expresables para todos los *n* como la suma de 3 fracciones unitarias. [Guy]

0,693 147 180 559 945 309 417 232 121 458 176 568 075 500 134 360
log 2 (en base *e)* = 1 – 1/2 + 1/3 – 1/4 + 1/5...

0,7404... = $\boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{18}}}$

¿Qué tan cerca se pueden empaquetar esferas idénticas? La manera obvia es colocar una capa en un plano de manera que cada esfera toque a otras 6, y luego colocar capas adyacentes, de manera que cada esfera toque a otras 3 en cada capa (12 en total) y así sucesivamente. Sin embargo, ningún matemático ha podido probar este hecho ‘obvio’.

Si ese fuera el embalaje más compacto, la densidad sería este número. ‘Muchos matemáticos creen, y todos los físicos saben, que la densidad no puede exceder $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$’. [Rogers]

0,831 907...
1/ζ(3), donde ζ(3) = $1/1^3 + 1/2^3$ 4- $1/3^3$ 4- $1/4^3$ + ...

Es la probabilidad de que, si se eligen 3 enteros al azar, ningún factor común los dividirá a todos.

0,9068... = $\boldsymbol{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}$

Los círculos idénticos agrupados en un plano en una matriz hexagonal, de modo que cada uno toca a los otros 6, cubren esta proporción del plano.

1
Unidad

Los griegos no consideraban que el 1, o la unidad, fuera un número en absoluto. Era la mónada, la unidad indivisible de la que surgieron todos los demás números. Según Euclides, un número es un agregado compuesto de unidades. No es irrazonable que no consideraran a 1 como un agregado de sí mismo.

Ya en 1537, el alemán Kobel escribió en su libro sobre computación, ‘De donde entiendes que 1 no es un número, pero es una generatriz, un principio y una base para todos los demás números.’

El significado especial de 1 es evidente en nuestro idioma [inglés]. Las palabras ‘uno’, ‘an’ y ‘a’ (una forma abreviada de ‘an’) son etimológicamente las mismas. También lo son las palabras ‘unidad’, ‘unión’, ‘único’ y ‘universal’, que provienen todas del latín. No es casualidad que estas palabras sean todas excepcionalmente importantes en las matemáticas modernas.

Los griegos consideraban que 1 era a la vez impar y par, porque cuando se añadía a un número par producía impar, y cuando se añadía a un número impar producía par. Este razonamiento es completamente falso, porque cualquier número impar tiene la misma propiedad. Sin embargo, tenían razón al notar que 1 es el único número entero que produce más por suma que por multiplicación, ya que la multiplicación por 1 no cambia un número. En contraste, cada otro entero produce más por multiplicación que por suma.

Es porque la multiplicación por 1 no cambia un número que 1 casi nunca aparece como coeficiente en expresiones como $x^2 + x + 4$. No tiene sentido escribir x como $1x$, a menos que queramos enfatizar algún patrón.

Por otro lado, 1 es de vital importancia cuando se suman series infinitas. La serie,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

no suma si x es mayor que 1, porque cada término es mayor que el anterior. Si $x = 1$, entonces la serie se convierte en $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ y todavía no suma. Pero cuando x es un número menor que 1, entonces la suma de tantos términos como elijamos añadir se acerca tanto como queramos a $1/(1 - x)$, sin exceder nunca ese número, y la serie infinita tiene una suma finita.

¿Qué hicieron los griegos con las fracciones? Seguramente habrán reconocido que la unidad indivisible, 1, podía ser dividida en 2 partes, o 3 partes, o 59 partes ¡En absoluto! Consideraron que la unidad original seguía siendo la misma, mientras que el resultado de la división, digamos 1/59, se tomó como una nueva unidad. De hecho, todavía hablamos de una fracción cuyo numerador es 1 como una fracción unitaria.

Esta interpretación se ajusta al uso de los comerciantes y artesanos de todo el mundo. ¡Cuánto más fácil es considerar 2 centímetros, en lugar de 0,02 metros, aunque matemáticamente son lo mismo! Psicológicamente, es mucho más sencillo inventar nuevas unidades de medida para cantidades pequeñas y grandes, y evitar completamente el uso de números muy pequeños o muy grandes.

1 aparece en su disfraz moderno como la generatriz, el fundamento de otros números, en tantas secuencias infinitas. Es, por supuesto, el primer número cuadrado, pero también es el primer cubo perfecto, y la primera 4ta potencia, la primera 5ta potencia... la primera de cualquier potencia.

Es también el primer número triangular, el primer número pentagonal... ¡el primer número de Fibonacci y el primer número de Catalan!

N. J. A. Sloane enumera 2.372 secuencias que han sido estudiadas por matemáticos en su *Handbook of Integer Sequences*. Con un mínimo de manipulación, se encarga de que cada secuencia comience con el número 1.

¿En cuántos trozos se puede cortar un panqueque circular con n cortes rectos? Es natural comenzar con la primera pieza, el panqueque entero, que permanece después de cero cortes.

¿De cuántas maneras se pueden organizar los objetos en orden? Los matemáticos modernos comienzan naturalmente con 1 objeto, el cual puede ser 'dispuesto' de una sola manera. Los griegos indudablemente habrían argumentado, muy plausiblemente, que la secuencia debería comenzar con 2 objetos, los cuales pueden ser arreglados en dos maneras. Ellos habrían afirmado que un objeto no puede ser dispuesto en ningún orden.

1 es especialmente importante por su falta de factores. Esto sugiere que debería contarse como un número primo, porque se ajusta a la definición, ‘Un número primo es divisible por ningún número excepto por sí mismo y 1’, pero una vez más 1 se considera generalmente como una excepción.

Una razón convencional depende de un teorema importante y favorito, que cualquier número puede ser escrito como el producto de factores primos de una sola manera, aparte de las diferentes maneras de ordenar los factores. Así $12 = 2 \times 2 \times 3$ y ningún otro producto de números primos es igual a 12.

Este teorema tendría que ser ajustado si 1 fuera un primo, porque entonces 12 también equivaldría a $1 \times 2 \times 2 \times 3$, y $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3$ y así sucesivamente. ¡Burdo! Así que 1 es desestimado de la lista de primos.

Euler tenía una razón diferente para rechazar 1. Observó que la suma de los divisores de un número primo, p, es siempre $p + 1$, el primo p mismo y el número 1. La excepción, por supuesto, a esta regla resulta ser 1. La forma más sencilla de deshacerse de este caso excepcional es negar que 1 es primo.

Debido a que 1 es tan pequeño, por así decirlo, y no tiene otros factores aparte de sí mismo, no aparece en muchas de las propiedades de este diccionario. Para escribir 1 como la suma de dos cuadrados, es necesario escribir $1 = 1^2 + 0^2$ que es trivial. De la misma manera, 1 puede ser escrito como la suma de 3 cuadrados, o incluso de 5 cubos, lo que es aún más aburrido.

Del mismo modo, 1 es el número más pequeño que es simultáneamente triangular y pentagonal. ¡También aburrido!

De hecho, 1 podría ser considerado el primer número que es a la vez aburrido e interesante.

Sin embargo, aparece en este diccionario de una manera pequeña pero esencial. Precisamente porque no tiene factores, nunca es obvio si expresiones como $2^5 - 1$, el 5to número de Mersenne, o $2^{2^3} + 1$, el 3er número de Fermat, tendrán algún factor.

Cuando Euclides quiso demostrar que el número de primos es ilimitado, consideró tres primos, a modo de ejemplo. Llámalos, *A*, *B* y *C*. Multiplícalos juntos, y suma 1: ¿es $ABC + 1$ primo? Si es así, hay un primo más grande que cualquiera de *A*, *B* o *C*. Si *ABC* + 1 no es primo, entonces tiene un factor primo, que no puede ser ninguno de los primos *A*, *B* o *C*. Por lo tanto, hay al menos un primo más...

El argumento de Euclides no habría funcionado si hubiera considerado *ABC* + 2, o *ABC* + 3. Sólo 1 garantizará su argumento.

Nuestra línea numérica, familiar para los niños en la escuela, se extiende por lo menos del 0 al infinito, y las brechas entre los números enteros son llenadas por infinidades de fracciones, números irracionales, y números aún más trascendentales.

La idea de los griegos del número era más simple e inadecuada para los propósitos de los matemáticos modernos. Sin embargo, un gran matemático vio los números enteros, empezando por el 1, como los únicos números reales. 'Dios hizo los números enteros', afirmó el matemático del siglo XIX Kronecker. Todo lo demás es obra del hombre.

1 no es el primer número de este diccionario, pero a su manera es la base sobre la que se basan todas las demás entradas.

Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1969.

1,060 660... = $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

El príncipe Rupert propuso el problema de encontrar el cubo más grande que se puede pasar a través de un cubo dado, es decir el tamaño del túnel cuadrado más grande a través de un cubo.

Pieter Nieuwland fue el primero en encontrar la solución. En teoría, no teniendo en cuenta las limitaciones físicas como la fricción, un cubo de lado 1,060660... se puede pasar a través de un cubo del lado 1. El eje del túnel no es paralelo a una diagonal del cubo, pero los bordes del cubo original están divididos en proporciones racionales, 1:3 y 3:13.

D. J. E. Schrek, 'Prince Rupert's Problem', *Scripta Mathematical* vol. 16.

1,082 323... = $\boldsymbol{\frac{\pi^4}{90}}$

El límite de la suma $1/1^4 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + ...$

1,202 056...

El límite de la suma $1/1^3 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + ...$

Es relativamente fácil sumar la serie l/r^n cuando n es uniforme. Euler calculó todos los valores de 2 a 26. Las sumas son todos múltiplos de π^n.

Es mucho más difícil calcular las sumas para *n* impares. Se sabe que 1,202... es irracional, pero no si es trascendental.

1,25992 10498 94873 16476... = $\sqrt[3]{3}$

(raíz cúbica de 2)

La duplicación del cubo

Los tres famosos problemas de la antigüedad eran la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Idealmente, los griegos habrían preferido resolver cada uno de ellos usando sólo una regla sin marcar y un par de compases.

La leyenda decía que los atenienses enviaron una delegación al oráculo de Delos para preguntar cómo podrían salvarse de una plaga que estaba asolando la ciudad. Se les ordenó que duplicaran el tamaño del altar de Apolo.

Este altar era de forma cúbica, por lo que construyeron un altar nuevo el doble de grande en cada dirección. El altar resultante, que era ocho veces el volumen del original, no logró apaciguar a los dioses y la plaga no disminuyó.

1,41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85697...

Encontrar un cubo cuyo volumen es el doble que el de otro, equivale a encontrar la raíz cúbica de 2.

Los griegos interpretaron esta exigencia de forma geométrica. Hipócrates demostró que era equivalente al problema de encontrar dos proporciones medias entre dos líneas de longitud *x* y 2*x*. En otras palabras, para encontrar los segmentos de línea de las longitudes p y q de tal manera que $x/p = p/q = q/2x$.

Esto es imposible con la regla y los compases, como Descartes demostró dos mil años más tarde, en 1637.

Los griegos, sin embargo, no se limitaron a líneas y círculos, y en la búsqueda de soluciones crearon algunos de los mejores logros de las matemáticas griegas.

Archytas de Tarento resolvió el problema encontrando la intersección de tres superficies de revolución, un cono, un cilindro y un toro cuyo diámetro interior era cero.

Se supone que Menaechmus descubrió las secciones cónicas, la parábola, la elipse y la hipérbola, mientras intentaba resolver este problema. Lo resolvió encontrando las intersecciones de dos parábolas, o alternativamente por la intersección de una parábola y una hipérbola.

Dos griegos, Nicomedes y Diodos, inventaron curvas específicas para resolver el problema, llamadas la concoidea y el cisoide respectivamente.

1,41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85697... = Raíz de 2

La raíz cuadrada de 2, y la longitud de la diagonal de un cuadrado unitario.

Pitágoras o uno de sus alumnos descubrió por primera vez que la relación entre la diagonal de un cuadrado y su lado no es una relación de enteros, es decir, es irracional.

Este descubrimiento tuvo un profundo efecto en los pitagóricos, que habían supuesto que todo fenómeno podía explicarse en términos de números enteros.

Teodoro, que enseñó matemáticas a Platón, demostró posteriormente que las raíces cuadradas de los números del 3 al 17 son irracionales, aparte de los cuadrados perfectos 4, 9 y 16. Aparentemente se detuvo en 17, sin ninguna razón obvia, pero claramente no tenía una prueba general de que cada entero es un cuadrado perfecto o su cuadrado es irracional.

Una secuencia de las mejores aproximaciones posibles a la raíz 2 es 1/1 3/2 7/5 17/12 41/29 99/70 239/169 577/408...

7/5 era una aproximación pitagórica. Los babilonios usaron el 17/12 como una primera aproximación a raíz de 2, y $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/603$ (= 1,4142155...) como una aproximación más precisa.

Las fracciones en esta secuencia son las mejores aproximaciones posibles para un tamaño dado de denominador. Están relacionados por la simple regla de que, si a/b es un término, el siguiente es $(a + 2b)/(a + b)$. [Theon de Smyrna en el siglo II sabía que si a/b es una aproximación, entonces $(a + 2b)/(a + b)$ es mejor].

Tienen muchas otras propiedades. Por ejemplo, cada fracción tiene un numerador y un denominador impar. Divida el numerador en la suma de dos números consecutivos:

$$\frac{41}{29} = \frac{20 + 21}{29}$$

Entonces, $20^2 + 21^2 = 29^2$.

También proporcionan soluciones a la ecuación de Pell: $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

$$72 - 2 \times 52 = -1$$

$$172 - 2 \times 122 = +1$$

$$412 - 2 \times 292 = -1$$

y así sucesivamente.

Roland Sprague describe una propiedad muy bonita. Escribe los múltiplos de la raíz de 2, ignorando las partes fraccionarias, y debajo de los números que faltan en la primera secuencia:

1	2	4	5	7	8	9	11	12	…
3	6	10	13	17	20	23	27	30	…

La diferencia entre los números superior e inferior es $2n$ en el enésimo lugar.

Roland Sprague, *Recreations in Mathematics*, Londres, 1963.

1,444 667 861... = $e^{1/e}$

La solución al problema de Steiner: ¿para qué valor de x es $x^{1/x}$ un máximo?

H. Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York, 1965.

Euler demostró que la función $x^{x^{x^{x^{x^{x^{x\cdots}}}}}}$ donde la altura de la torre de exponentes tiende al infinito, tenía un límite si x está entre $e^{-e} = 0{,}065\ 988...$ y este límite superior, $e^{1/e}$.

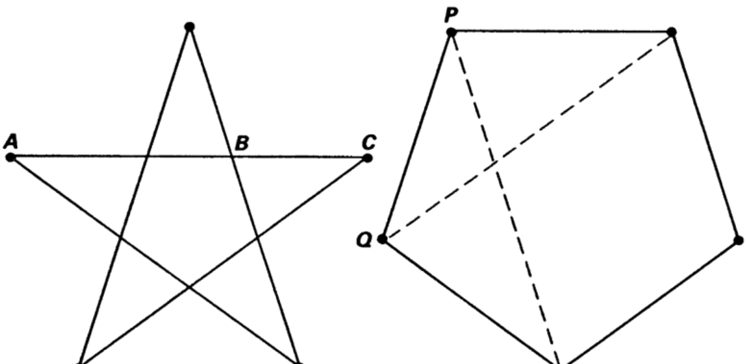
1,61803 39887 49894 84820 45868 34365 63811 77203 09179 80576...

La Divina Proporción

La Divina Proporción o Relación Áurea, igual a

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

En el pentagrama, que los pitagóricos consideraban un símbolo de salud, la relación AB a BC es la Relación Dorada. También lo es la relación AC a AB, y relaciones similares en la misma figura.



Euclides en sus *Elementos* llama a esta división ‘la razón extrema y media’ y la usó para construir primero un pentágono regular, y luego los dos sólidos platónicos complejos más grandes, el dodecaedro, que tiene 12 caras pentagonales, y el icosaedro, que es su dual. El significado místico de estos hermosos poliedros para los griegos se transfirió naturalmente a la Relación Áurea.

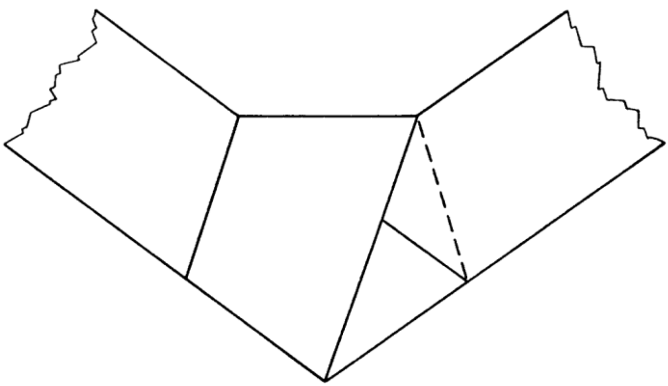
Hay algunas pruebas de que la proporción era importante para los egipcios. El papiro Rhind se refiere a una 'proporción sagrada' y la proporción en la Gran Pirámide de Gizeh de una altitud de una cara a la mitad del lado de la base es casi exactamente 1,618.

Los griegos probablemente lo utilizaron en la arquitectura, pero no quedan pruebas documentales. No hay duda de que fue explotada conscientemente por los artistas del Renacimiento, que la conocían como la Divina Proporción.

Fra Luca Pacioli publicado en 1509 *De divina Proportione*, ilustrado con dibujos de los sólidos platónicos hechos por su amigo Leonardo da Vinci. Leonardo fue probablemente el primero en referirse a ella como la 'sectio aurea', la Sección Aurea. Los griegos, sorprendentemente, no tenían un nombre breve para ello.

Pacioli presentó 13 de sus notables propiedades, concluyendo que 'en aras de la salvación, la lista debe terminar (aquí)', porque 13 era el número presente en la mesa en la Última Cena. Fray Luca también redujo las 8 operaciones estándar de aritmética a 7 en reverencia a los 7 dones del Espíritu Santo.

'El Noveno Efecto Más Excelente' es que dos diagonales de un pentágono regular, como en la figura anterior, se dividen entre sí en la Proporción Divina. Ata un nudo ordinario en una tira de papel, aplástalo con cuidado y aparecerá la misma figura.



Kepler, que basó su teoría de los cielos en los cinco sólidos platónicos, se entusiasmó con la Divina Proporción, declarando: ‘La Geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el Teorema de Pitágoras, el otro es la división de una línea en proporción extrema y media; el primero se puede comparar con una medida de oro, el segundo se puede llamar una joya preciosa’.

Los artistas renacentistas utilizaban regularmente la Sección Áurea para dividir la superficie de una pintura en agradables proporciones, de la misma manera que los arquitectos la utilizaban naturalmente para analizar las proporciones de un edificio. La primera edición italiana de *De Architectura* de Vitrubio utiliza la Relación de Oro para analizar la elevación de la Catedral de Milán.

El psicólogo Gustav Fechner revivió este aspecto estético de la Razón Áurea en sus intentos de establecer la estética sobre una base experimental.

Medía sin cesar las dimensiones de cuadros, tarjetas, libros, cajas de rapé, papel para escribir y ventanas, entre otras cosas, en un intento de desarrollar una estética experimental ‘desde abajo’. Concluyó que el rectángulo preferido tenía sus lados en la Relación de Oro.

Le Corbusier, el arquitecto, siguió esta creencia en su eficacia en el diseño de El Modular. Construyó dos series en paralelo, una de poderes de la Relación Áurea, y la otra de doblar estos poderes. Un colega arquitecto detectó la doble influencia del Renacimiento y del espíritu gótico en él, y los corresponsales se apresuraron a apoyar las afirmaciones de Le Corbusier sobre sus propiedades armonizadoras.

Los matemáticos llaman ahora a la Razón Áurea τ, primera letra del griego *tomo*, para cortar, o usan la letra griega φ, siguiendo el ejemplo de Mark Barr, un matemático americano, que le puso el nombre de Fidias, el escultor griego.

Si la mayor parte de la línea es de longitud φ y la menor parte 1, entonces

$$\frac{\varphi + 1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1}$$

que también puede escribirse como

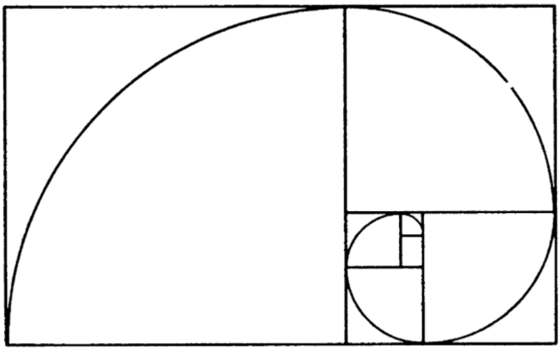
$$\varphi^2 = \varphi + 1, \text{ o como } 1/\varphi = \varphi - 1$$

En otras palabras, se encuadra sumando unidad, $(1{,}618...)^2 = 2{,}618...$ y su recíproco se encuentra restando la unidad,

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

(Ocasionalmente su recíproca se llama la Razón Áurea, lo cual puede ser ligeramente confusa.)

Si se dibuja un rectángulo cuyos lados están en la Razón Áurea, puede ser dividido en un cuadrado y otro rectángulo similar. Este proceso puede repetirse hasta el *infinito*.



Es posible dibujar una espiral equiangular a través de vértices sucesivos de la secuencia de rectángulos. El diagrama muestra una excelente aproximación a esta espiral, una secuencia de cuartos de círculo. La espiral tiende hacia el punto donde las diagonales de todos los Rectángulos de Oro se encuentran.

Esta espiral es similar a sí misma, por lo que no es de extrañar que se produzca con frecuencia en la naturaleza, en la disposición de las cabezas de girasol, las conchas en espiral, y en la disposición de las hojas en las ramas.

La misma Relación Áurea está íntimamente relacionada con la secuencia de Fibonacci.

Al igual que φ^2, las potencias superiores de φ pueden expresarse todas ellas muy simplemente en términos de φ:

φ^2 φ^3 φ^4 φ^5 φ^6

$\varphi + 1 \qquad 2\varphi + 1 \qquad 3\varphi + 2 \qquad 5\varphi + 3 \qquad 8\varphi + 5$

Cada potencia es la suma de las dos potencias anteriores, y los coeficientes de φ forman la secuencia de Fibonacci de nuevo, al igual que las partes enteras de las potencias.

φ tiene muchas otras propiedades.

Es igual a la fracción continua más simple:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

que es también la más lenta de todas las fracciones continuas que convergen a su límite.

Las convergencias sucesivas son 1/1 2/1 3/1 3/2 5/3... los numeradores y denominadores siguiendo la secuencia de Fibonacci. Dos aproximaciones fáciles de recordar son 377/233 y 233/144. Coincidentemente, 355/113 es una excelente aproximación a π.

Thomas O'Beirne explica una propiedad más oscura pero igualmente bella: calcular los múltiplos de φ y φ^2 por los números enteros, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... rechazando las partes fraccionarias. El resultado es una secuencia de pares: (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), ...

Esta secuencia tiene la triple propiedad de que las diferencias entre los números de cada par sucesivo aumentan en uno; el número más pequeño de cada par es el número entero más pequeño que aún no ha aparecido en la secuencia, y la secuencia incluye cada número entero exactamente una vez. Como broche final, estos pares de números son todas las combinaciones ganadoras en el juego de Wythoff.

H. E. Huntley, *The Divine Proportion; Historical Topics for the Mathematics Classroom,* NCTM, Washington, 1969.

1,644 934 066... = $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{6}}$

La suma de la serie $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$

1,732 050 807 568 877 293 527 446 341 505 872 366 942...

La raíz cuadrada de 3, el segundo número, después de la raíz de 2, que se ha demostrado irracional, por Teodoro.

Arquímedes dio las aproximaciones, $1351/780 < \sqrt{3} < 265/153$ (o $26 - 1/52 < 15\sqrt{3} < 26 - 1/51$).

Estos satisfacen las ecuaciones $1351^2 - 3 \times 780^2 = 1$ y $265^2 - 3 \times 153^2 = -2$, que son consistentes con la opinión de que Arquímedes tenía cierta comprensión de las ecuaciones de Pell.

1,772 453 850 905 516 027 298 167 483 341 145 182 191... = $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

La función factorial, *n*!, que se define para todos los enteros positivos y por convención para 0, se puede definir mediante una integral para valores no integrales de *n*. Esta función se denomina $\Gamma(n + 1)$. $\Gamma(½) = \sqrt{\pi}$.

1,90195

El valor aproximado de la constante de Brun, igual a la suma, 1/3 + 1/5 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/29 + 1/31 + ... donde los denominadores son los primos gemelos. A veces se calcula sin la repetición de 1/5.

(También se ha calculado a partir de 1 + 1/3 + 1/3 + 1/5 + 1/5 + 1/7 + ... llevando a un matemático a conjeturar brevemente y con optimismo que su suma era π.)

No se sabe si el número de pares de primos es infinito. Sin embargo, se sabe que esta suma converge, en contraste con la suma de los recíprocos de los primos, que difiere.

Su valor es extremadamente difícil de calcular. La mejor estimación es $1{,}90195 \pm 10^{-5}$.

2

El número 2 ha sido excepcional desde los primeros tiempos, en muchos aspectos de la vida humana, no sólo matemáticamente.

Se distingue en muchos idiomas, por ejemplo, en indoeuropeo, egipcio, árabe, hebreo, sánscrito y griego, por la presencia de casos duales para sustantivos, usados cuando se refiere a 2 de los objetos, en lugar de 1 o muchos. Algunos idiomas también tenían formas de tríadas y cuaternales.

La palabra dos, cuando se usa como adjetivo, a menudo se acentúa, al igual que ocasionalmente las palabras tres y cuatro.

Las lenguas modernas reflejan el significado de 2 en palabras como dual, duelo, par, pareja, gemelo y doble.

Los primeros griegos no estaban seguros de si el 2 era un número, observando que tiene, por así decirlo, un principio y un final, pero no un medio.

Más matemáticamente, señalaron que $2 + 2 = 2 \times 2$, o de hecho que cualquier número multiplicado por 2 es igual al mismo número sumado a sí mismo. Dado que esperaban que la multiplicación no se limitara a la mera suma, consideraron que la multiplicación era un caso excepcional.

Independientemente de que el 2 calificara como un número adecuado o no, se consideraba que era femenino, al igual que todos los números pares, en contraste con los números impares, que eran masculinos.

La división en dos partes, la dicotomía, es psicológicamente más significativa y más frecuente en la práctica que cualquier otra clasificación.

La simetría más común es bilateral, de dos lados sobre un solo eje, y es de orden 2.

Nuestros cuerpos son bilateralmente simétricos, y naturalmente distinguimos entre la derecha y la izquierda, entre arriba y abajo, entre delante y detrás. La noche está separada del día, hay dos sexos, las estaciones se expresan en pares, el verano y el invierno separados por la primavera y el otoño, y las comparaciones son más comúnmente dicotómicas, como más fuerte o más débil que, mejor o peor que, juventud versus edad y así sucesivamente.

2 y la división en 2 partes es igual de significativa en matemáticas. 2 es el primer número par, todos los números se dividen en impares y pares.

Las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división son operaciones binarias, realizadas en primera instancia sobre 2 números.

Por sustracción de cero, cada número positivo se asocia con un número negativo único, y 0 divide todos los números en positivos y negativos. De manera similar, la división en 1 asocia cada número con su recíproco.

2 es el primer y el único primo par.

2 es un factor de 10, la base del sistema numérico habitual. Por lo tanto, un número es divisible por 2 si su dígito de unidad lo es, y por 2^n si 2^n divide el número formado por sus últimos n dígitos.

Las potencias de 2 aparecen con más frecuencia en matemáticas que las de cualquier otro número.

Un número entero es la suma de una secuencia de números enteros consecutivos si y sólo si *no* es una potencia de 2.

El primer número deficiente. Todas las potencias de un primo son deficientes, pero las potencias de 2 sólo lo son un poco.

Euler afirmó lo que Descartes había supuesto, que en todos los poliedros simples, por ejemplo el cubo y la pirámide cuadrada, el número de vértices más el número de caras supera en 2 el número de bordes.

El último teorema de Fermat establece que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ tiene soluciones en números enteros sólo cuando $n = 2$. Las soluciones son entonces lados de un triángulo pitagórico en ángulo recto.

Siendo la ecuación de Fermat extremadamente difícil de resolver, varios matemáticos han notado en un momento de inactividad que $n^x + n^y = n^z$ es mucho más fácil. Sus únicas soluciones en números enteros son cuando $n = 2$, y $2^1 + 2^1 = 2^2$.

Goldbach conjeturó que cada número par mayor que 2 es la suma de 2 números primos.

El sistema binario

El sistema imperial inglés de medidas contenía una larga secuencia de medidas, algunas de las cuales todavía están en uso, en las que cada medida era el doble de la anterior. Presumiblemente fueron muy útiles en la práctica, aunque es poco probable que la mayoría de los comerciantes tuvieran idea de cuántas branquias estaban contenidas en una cuba:

1 tonel (*tun*) = 2 tubos (*pipes*) = 4 cabezas de cerdo (*hogsheads*) = 8 barriles (*barrels*) = 16 *kilderkins* = 32 *firkins* o *bushels* = 64 *demi-bushels*

= 128 *pecks* = 256 galones = 512 *pottles* = 1024 cuartos de galón = 2048 pintas = 4096 *chopins* = 8192 *gills*.[3]

Los números que aparecen en esta lista son sólo potencias de 2, desde $2^0 = 1$ hasta $2^{13} = 8192$.

Estas medidas podrían muy fácilmente haberse expresado en notación binaria, o base 2.

Cada número puede ser expresado de una manera única como la suma de poderes de 2. Así: 87 = 64 + 16 + 4 + 2 + 1, que se puede escribir brevemente como 87 = 1010111.

Cada unidad indica una potencia de 2 que debe ser incluida y cada cero una potencia que debe ser omitida, como en esta tabla para 1010111:

64	32	16	8	4	2	1
sí	no	sí	no	sí	sí	sí
1	0	1	0	1	1	1

El sistema binario fue inventado en Europa por Leibniz, aunque se hace referencia a él en un libro chino que supuestamente data de alrededor del año 3000 a.C.

Leibniz asoció el 1 con Dios y el 0 con la nada, y encontró un significado místico en el hecho de que todos los números podían así ser creados a partir de la unidad y la nada. Sin aceptar su teología matemática podemos apreciar que hay una inmensa elegancia y simplicidad en el sistema binario.

Ya en 1725 Basile Bouchon inventó un dispositivo que utilizaba un rollo de papel perforado para controlar los hilos de urdimbre en un telar mecánico. Cualquier posición en una hoja de papel puede ser considerada como perforada o no perforada. La misma idea se utilizó en la pianola, un piano mecánico popular en los hogares victorianos, que también estaba controlado por rollos de papel.

Los telares se cambiaron pronto a control mediante tarjetas perforadas, que también se utilizaron en el Motor Analítico de Charles Babbage, precursor del moderno ordenador digital, que se basó en tarjetas perforadas hasta la llegada de las cintas y los discos magnéticos. La notación

[3] Keith Devlin, *Guardian*, 20 de octubre de 1983.

binaria es especialmente útil en los ordenadores porque se construyen de forma muy sencilla a partir de componentes que tienen dos estados: o bien están activados o desactivados, llenos o vacíos, ocupados o desocupados.

El mismo principio hace que la notación binaria sea ideal para codificar los mensajes que se envían a lo largo de un cable. El 1 y el 0 están representados por la corriente que se está conectando y desconectando.

Mucho antes de que se inventaran las computadoras mecánicas, los egipcios multiplicaban duplicando, tantas veces como fuera necesario, y añadiendo los resultados. Por ejemplo, para multiplicar por 6 es suficiente doblar dos veces y sumar las dos respuestas. Dentro de la memoria viva, los campesinos rusos utilizaron una versión más sofisticada de la misma idea, que alguna vez se utilizó en muchas partes de Europa.

Para multiplicar 27 por 35, escriba los números en la parte superior de dos columnas: escoja una columna y reduzca a la mitad el número una y otra vez, ignorando cualquier resto, hasta que se alcance 1. Ahora dobla el otro número tantas veces como quieras:

27	35
13	70
6	~~140~~
3	280
1	560
	945

Tache los números en esta segunda columna que están enfrente de un número par en la primera. La suma de los números restantes es la respuesta, 945.

Uno de los hechos más simples y básicos sobre un número es su paridad, ya sea impar o par, es decir, si se divide por 2 sin resto.

Todos los primos son impares, excepto 2.

Todos los números perfectos conocidos son pares.

La suma de esta serie:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

es mucho más fácil de calcular si *n* es par que si es impar.

La simetría más simple es doble, como cuando se deja caer tinta sobre una hoja de papel, y el papel se dobla una vez y se presiona hacia abajo para producir una mancha simétrica.

La paridad aparece en rompecabezas conocidos como el de Sam Loyd, ‘Juego del Quince’. Todas las posiciones posibles de las fichas se pueden clasificar como impares o pares. Si la posición que está intentando alcanzar es de paridad opuesta a la posición de partida, es mejor que se dé por vencido y se vaya a casa. Es imposible de alcanzar.

F. G. Heath, ‘Origins of the Binary Code’, *Scientific American*, agosto de 1972.

2,094 551...

La solución real a la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Esta ecuación fue resuelta por Wallis para ilustrar el método de Newton para la solución numérica de las ecuaciones. Desde entonces ha servido como prueba para muchos métodos de aproximación posteriores, y su raíz real se conoce ahora con 4.000 dígitos.

F. Gruenberger, ‘Computer Recreations’, *Scientific American*, abril de 1984.

2,236 067 = $\sqrt{\mathbf{5}}$

2,302 585 092 994 045 684 017 991 454 684 364 207 601...

El logaritmo natural de 10.

2,506 628... = $\sqrt{\mathbf{2\pi}}$

El factor constante en la fórmula asintótica de Stirling para $n!$ y por lo tanto el límite, cuando n tiende a ser infinito, de

$$\frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

2,618 033...

El cuadrado de φ, la Relación Áurea, y el único número positivo tal que $\sqrt{n} = n - 1$.

2,665 144... = $2^{\sqrt{2}}$

El séptimo de los famosos 23 problemas de Hilbert propuestos en el Congreso Matemático de 1900 fue para probar la irracionalidad y trascendencia de ciertos números.

Hilbert dio como ejemplos $2^{\sqrt{2}}$ y e^{π}. Más tarde en su vida expresó la opinión de que este problema era más difícil que los problemas de la hipótesis de Riemann o el teorema del Último de Fermat.

Sin embargo, $2^{\sqrt{2}}$ en 1929 y e^{π} en 1930 se demostraron trascendentales, ilustrando la extrema dificultad de anticipar el progreso futuro de las matemáticas y la dificultad real de cualquier problema… hasta después de que haya sido resuelto.

2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757 247 093 699...

e, la base de los logaritmos naturales, también llamados logaritmos neperianos, aunque Napier no tenía concepción de base y ciertamente no usaba *e*.

Fue nombrado '*e*' por Euler, quien probó que es el límite, cuando x tiende a infinito, de $(1 + 1/x)^x$

Newton había mostrado en 1665 que $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$ de los cuales $e = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + ...$ una serie que es adecuada para el cálculo porque sus términos disminuyen con gran rapidez.

Por casualidad, los primeros decimales de e son excepcionalmente fáciles de recordar, por el patrón 2,7 1828 1828 1828 45 90 45...

La mejor aproximación a e usando números por debajo de 1000 también es fácil de recordar: 878/323 = 2,71826...

Como π, *e* es irracional, como lo demostró Lambert.

Hermite demostró que también es trascendental en 1873.

e se encuentra en la hermosa relación de Euler, $e^{i\pi} = -1$ y, más generalmente, e está relacionado con las funciones trigonométricas por $e^{i\theta} = \cos\theta + /\text{sen}\,\theta$.

Posee la notable propiedad de que la tasa de cambio de e^x a $x = t$, es e^t, de la cual sigue su importancia en el cálculo diferencial e integral, y su papel único como base de los logaritmos naturales.

3

El primer número impar según los griegos, que no consideraban la unidad como un número.

Para los pitagóricos, el primer número porque, a diferencia del 1 y el 2, posee un principio, un medio y un final. También consideraron que 3, y todos los números impares, eran hombres, en contraste con los números pares, que eran mujeres.

El primer número, según Proclus, porque se incrementa más por multiplicación que por suma, lo que significa que 3 × 3 es mayor que 3 + 3.

La división o clasificación en 3 partes es excepcionalmente común. En muchos idiomas, lo positivo, lo comparativo y lo superlativo se diferencian. En inglés, la secuencia una vez-dos veces-tres veces[4] no va más allá.

Había trinidad de dioses en Grecia, Egipto y Babilonia. En el cristianismo, Dios es una trinidad.

En la mitología griega había 3 Destinos, 3 Furias, 3 Gracias, 3 veces 3 Musas, y París tuvo que elegir entre 3 diosas.

Los juramentos se repiten tradicionalmente 3 veces. En el Nuevo Testamento, Pedro niega a Cristo tres veces. El Campanero en ‘The Hunting of the Snark’ dice, más prosaicamente, ‘¡Lo que te digo tres veces es verdad!’

El mundo se divide tradicionalmente en tres partes: el inframundo, la tierra y los cielos.

El mundo natural es tridimensional, la 4ª dimensión del tiempo de Einstein está asimétricamente relacionada con las 3 dimensiones de la

[4] once-twice-thrice.

longitud. En 3 dimensiones, se pueden dibujar como máximo 3 líneas que son mutuamente perpendiculares.

Los griegos consideraban las longitudes, los cuadrados de longitudes, que estaban representados por áreas, y los cubos de longitudes, representados por sólidos. Las potencias superiores fueron rechazadas por antinaturales. Los números con 3 factores a veces se consideraban sólidos, de la misma manera que un número con 2 factores se interpretaba por una figura plana, como un cuadrado o alguna forma de rectángulo, o por una de las figuras poligonales.

(Un comentarista de Platón describe los números pares como isósceles, porque pueden ser divididos en partes iguales, y los números impares como escalenos.)

También asociaron 3 con el triángulo, que tiene 3 vértices y 3 bordes, y fue la figura más común en su geometría y la nuestra.

La trisección del ángulo fue uno de los tres problemas famosos de la antigüedad, siendo los otros la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

El problema es, o era, triseccionar un ángulo arbitrario, usando sólo una regla, lo que significa un borde recto sin marcar, y un par de compases. Al igual que la duplicación del cubo, depende, en lenguaje moderno, de la solución de una ecuación cúbica.

Descartes mostró que esto se puede lograr como la intersección de una parábola y un círculo, pero desafortunadamente los puntos requeridos en la parábola no pueden ser construidos por la regla y los compases.

Sin embargo, se puede resolver mediante el uso de curvas especiales. Pappus usó una hipérbola, e Hippias inventó la cuadratura que puede ser usada para dividir un ángulo en cualquier proporción. El concoide inventado por Nicomedes triseccionará el ángulo y duplicará el cubo.

Euler demostró que en cualquier triángulo, el centroide se encuentra en la línea que une el circuncentro con el punto de intersección de las altitudes, y lo divide en la proporción 1:2.

Se puede dibujar un círculo a través de 3 puntos cualesquiera que no estén en una línea recta.

Sólo hay 3 teselados del plano con polígonos regulares, usando triángulos, cuadrados o hexágonos equiláteros como en un panal.

3 es el segundo número triangular, después del inevitable 1. Gauss demostró que cada número entero es la suma de un máximo de 3 números triangulares. La entrada 18 de su diario, fechada el 10 de julio de 1796, cuando sólo tenía 19 años de edad, dice EYPHKA! num = Δ + Δ + Δ .

Todos los números que no son de la forma $4^n(8m + 7)$ forman la suma de 3 cuadrados.

3 divide a 1 menos que cualquier potencia de 10. En consecuencia, un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

3 es el segundo primo, y el primer primo impar, el primer primo de la forma $4n + 3$, y el primer primo de Mersenne, ya que 3 = 22 - 1.

Es el primer primo de Fermat, $3 = 2^{2^0} + 1$.

Todos los números impares suficientemente grandes son la suma de un máximo de tres primos. [Vinogradov, 1937]

Es el primer miembro de una pareja primaria, 3 y 5, siendo las siguientes parejas (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), ... No se sabe si el número de pares primos es infinito.

Es el primer miembro de una progresión aritmética de 3 primos, 3-5-7.

3 = 1! + 2!

El primer caso del último teorema de Fermat, $x^3 + y^3 = z^3$ no tiene solución en enteros, probado por Euler.

El cuadrado mágico más pequeño es de orden 3.

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41972... = π

π, el más famoso y más notable de todos los números, es la relación entre la circunferencia de un círculo a su diámetro, y el área de un círculo unitario.

π es el único número irracional y trascendental que ocurre naturalmente, aunque sólo sea como una simple aproximación, en todas las sociedades en las que se miden los círculos.

En el Antiguo Testamento, 1 Reyes 7:23 implica que π es igual a 3. Los Babilonios alrededor del año 2000 AC suponían que π era 3 o 3 1/8. El escriba egipcio Ahmes, en el papiro Rhind (1500 a.C.), declaró que el área de un círculo es igual a la del cuadrado de 8/9 de su diámetro, lo que hace que π sea igual a (16/9) cuadrado o 3,16049.

Tales valores burdos eran adecuados para los artesanos o ingenieros primitivos. Sin embargo, para los griegos, que fueron los primeros matemáticos 'puros', π tenía un significado más profundo. Les fascinaba el problema de la 'cuadratura del círculo', uno de los 'tres famosos problemas de la antigüedad', es decir, el de encontrar mediante una construcción geométrica, utilizando únicamente reglas y compases, un cuadrado cuya superficie era exactamente, y no de forma aproximada, igual a la de un círculo determinado.

Arquímedes, calculando las áreas de los polígonos regulares con 96 lados, determinó que π estaba entre 3 10/71 = 3,14085... y 3 10/70 = 3,142857... Arquímedes también encontró aproximaciones más precisas al valor de π.

Este último valor es 3 1/7 o 22/7, conocido por generaciones de escolares. También es la mejor aproximación a π, usando la relación de dos números menos de 100. En binario π = 11,0010010000111111011... Se puede redondear al decimal que se repite 11,001001001. que es igual a 3 1/7.

Ptolomeo, el astrónomo griego, usó 377/120 (= 3,1416...) pero la siguiente gran mejora fue en China, donde Tsu Ch'ung-Chi y su hijo declararon que π estaba entre 3,1415926 y 3,1415927 y dio la aproximación 355/113. Esta es la mejor aproximación de cualquier fracción por debajo de 103993/33102.

El resultado de Tsu no mejoró hasta que Al-Kashi en el siglo XV dio 16 plazas correctamente. Los matemáticos europeos de entonces iban muy por detrás. Fibonacci, por ejemplo, encontró sólo 3 decimales correctamente.

En el siglo XVI, sin embargo, los matemáticos europeos se pusieron al día y luego siguieron progresando.

El más exitoso y obsesivo fue Ludolph van Ceulen, que pasó gran parte de su vida en el cálculo de π, primero lo encontró correcto con 20 decimales, luego con 32, y finalmente con 35 lugares. No vivió para publicar su logro final, pero fue grabado en su lápida en una iglesia de Leyden. Cuando la iglesia fue reconstruida y su tumba destruida, su epitafio ya había sido registrado en una inspección de Leyden, y su obra de vida preservada, pero un monumento más duradero es el nombre de 'número de Ludolphian' que se ha utilizado para π en Alemania.

Más o menos al mismo tiempo, Adriaen Metius 'descubrió' la aproximación muy exacta de Tsu, 355/113, tomando dos límites que habían sido calculados por su padre, 377/120 y 333/106, y simplemente promediando los numeradores y denominadores. Esto garantiza la producción de un número que se encuentra entre las dos fracciones originales, pero eso es todo.

Los métodos de Ludolph eran básicamente los mismos que los de Arquímedes. Con el desarrollo de la trigonometría, se dispuso de métodos mucho mejores.

Snell calculó 34 lugares usando las mismas operaciones geométricas que le permitieron a Ludolph calcular sólo 14, mientras que Huygens calculó π a 9 lugares usando sólo el hexágono regular!

Otros avances siguieron rápidamente a medida que los matemáticos comenzaron a entender y usar series infinitas, límites y cálculo.

Ninguno de los cálculos de Ludolph o de sus predecesores había mostrado regularidad alguna en los dígitos decimales de π. François Viete, el padre del álgebra moderna, mostró por primera vez en 1592 una fórmula para π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

¡Por fin un patrón! John Wallis siguió con:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times \ldots$$

Isaac Newton, habiendo regresado a Grantham en 1666 para escapar de la Gran Plaga, encontró fácilmente π a 16 lugares usando sólo 22 términos de esta serie:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{3} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\times 2^5} - \frac{1}{28\times 2^7} - \frac{1}{72\times 2^9} - \cdots\right)$$

En 1673 Leibniz descubrió que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Esta serie es notable por su simplicidad, pero es desesperadamente ineficiente como una forma de calcular π, porque hay que calcular tantos cientos de términos para obtener incluso unos pocos dígitos de π.

Sin embargo, con un ingenioso juego de manos, John Machin lo reemplazó en 1706 por una fórmula similar que le permitía calcular eficientemente hasta 100 decimales, mucho más allá de los esfuerzos de Ludolph van Ceulen.

Euler, que utilizó por primera vez la letra griega π en su sentido moderno, dio una demostración aún más impresionante del poder de estos nuevos métodos al calcular π con 20 decimales en sólo una hora.

Euler era un gran matemático, así como un ordenador andante. Fue él quien reveló por primera vez la extraordinaria relación entre π, *e*, la base de los logaritmos naturales, *i*, la raíz cuadrada de –1, y cero: $e^{i\pi} = -1$.

Johann Lambert dio otro importante paso adelante al demostrar que π es irracional. También calculó, usando fracciones continuas, las mejores aproximaciones racionales a π, desde 103993/33102 hasta 1019514486099146/324521540032945.

π En ese momento, hacía tiempo que había dejado de ser sólo la relación entre la circunferencia y el diámetro, pero la tarea de calcular simplemente tantos decimales como fuera posible no había perdido su glamour. De hecho, se publicaron decenas de cálculos. Uno de los más rápidos fue el de Johann Dase (1824-1861), con 200 posiciones, completado en menos de dos meses.

Dase había sido un prodigio calculador de niño y fue empleado, por recomendación de Gauss, para calcular tablas de logaritmos y funciones hiperbólicas.

En 1853 William Shanks publicó sus cálculos de π con 707 decimales. Utilizó la misma fórmula que Machin y calculó en el proceso varios logaritmos con 137 decimales y los valores exactos de 2^{721}.

Un comentarista victoriano afirmó: Estos tremendos tramos de cálculo... prueban más que la capacidad de tal o cual computadora para el trabajo y la precisión; muestran que hay en la comunidad un aumento en la habilidad y el coraje...

Augustus de Morgan pensó que vio algo más en los trabajos de Shanks. La cifra 7 aparecía sospechosamente menos a menudo que las otras cifras, sólo 44 veces frente a una media esperada de 61 por cada cifra. De Morgan calculó que las probabilidades contra una frecuencia tan baja eran de 45 a 1.

De Morgan, o más bien William Shanks, estaba equivocado. En 1945, usando una calculadora de escritorio, Ferguson encontró que Shanks había cometido un error; su cálculo fue incorrecto desde el lugar 528 en adelante. Afortunadamente, Shanks llevaba mucho tiempo muerto.

Las computadoras electrónicas son, por supuesto, muy superiores a las calculadoras humanas. Ya en 1949 la ENIAC calculó π con 2037 lugares en 70 horas… sin cometer ningún error. En 1967 un CDC 6600 francés calculó 500.000 decimales, y en 1983 un equipo japonés de Yoshiaki Tamura y Tasumasa Kanada produjo 16.777.216 (= 2^{24}) dígitos.

¿Cuál es el sentido de tales cálculos? Curiosamente, se trata principalmente de investigar el tipo de irregularidades que de Morgan creía haber detectado. Generalmente se cree que π es normal, y que en cierto sentido no hay ningún patrón en la expansión decimal de π, que aunque es producido por un proceso definido, es efectivamente aleatorio.

Ciertamente parece aleatorio para un examen rápido, a pesar de un pedazo de seis 9 consecutivos entre los decimales 762 y 767. Martin Gardner ha explicado otro ‘patrón’, que ocurre mucho antes. Aquí están los decimales 6º a 30º, ligeramente espaciados para enfatizar el patrón:

...26 53589 793238 46 26 43 383279...

Un poco más adelante, los dígitos 359, 360 y 361, contando ‘3’ como el primero, son 3-6-0, y el 315 está igualmente centrado sobre el dígito 315.

Tales patrones, sin embargo, serían esperados si π es verdaderamente aleatorio. De hecho, cualquier patrón posible debería aparecer tarde o temprano. ¡Debería aparecer la secuencia de dígitos 123456789! ¿Lo hace? No, no hasta ahora, aparentemente, pero eso no es ninguna sorpresa, porque un mero 16.000.000 de dígitos no es nada comparado con la interminable secuencia de dígitos que se avecina...

Los primeros 16 millones de dígitos, por cierto, han pasado todas las pruebas de aleatoriedad utilizadas hasta ahora.

¿Qué ha pasado mientras tanto con la ambición griega de cuadrar el círculo? Varios matemáticos griegos pensaron que lo habían hecho, aunque sus resultados eran, en el mejor de los casos, muy similares.

Los matemáticos, como es lógico, pronto aprendieron por experiencia que el problema era extraordinariamente difícil, o imposible de resolver, pero sus opiniones expertas tuvieron poco efecto en amortiguar el ardor de una legión de *cuadradores* de círculo, algunos de ellos excesivamente eminentes (en sus propios campos diferentes), que podían entender el enunciado del problema, pero no sus dificultades.

Nicolás de Cusa (1401-1464) fue un cardenal y un erudito famoso. Dio 3,1423 como valor exacto, pero en parte se redimió a sí mismo dando una aproximación trigonométrica genuinamente buena, que más tarde fue utilizada por Snell.

Joseph Scaliger fue otro notable erudito, un filólogo brillante, con ambiciones de ser matemático, que trató de cuadrar el círculo. Sus intentos fueron refutados por Viete.

Aún más curioso es el caso del filósofo inglés Thomas Hobbes (1588-1679) que había aprendido algo de los últimos avances en matemáticas de Mersenne en París. Sus intentos de cuadrar el círculo fueron refutados por John Wallis, a quien Hobbes atacó tontamente. Pasaron el siguiente cuarto de siglo discutiendo amargamente, sin hacer ningún daño a Wallis, pero dañando la alta reputación de Hobbes.

Jacob Marcelis, hacia 1700, supuso que había cuadrado el círculo. Su valor exacto para π era:

$$3\ \frac{1.008.449.087.377.541.679.894.282.184.894}{6.997.183.637.540.819.440.035.239.271.702}$$

lo que sugiere que compartía parte del entusiasmo de Shanks por el trabajo duro, sin la misma justificación.

Un intento de cuadrar el círculo casi llega a los libros de leyes. En 1897, el proyecto de ley No. 246 de la Cámara de Representantes del Estado de Indiana fue presentado a la Cámara de Representantes del Estado de Indiana. Se basó en los esfuerzos de un tal Edwin J. Goodwin, médico, pero no matemático, que valientemente tituló su propuesta: ‘Un proyecto de ley que introduce una nueva verdad matemática’. A pesar de ser a la vez muy oscuro y muy absurdo, superó su primera lectura, pero se retrasó antes de una segunda lectura debido a la intervención. de C. A. Waldo, un profesor de matemáticas que estaba de paso. ¡Su segunda lectura no ha tenido lugar hasta el día de hoy!

Tal es la autoconfianza patológica de muchos cuadradores de círculos que la especie sin duda florecerá para siempre. Para los matemáticos, sin embargo, el problema de la cuadratura del círculo fue finalmente resuelto en 1882 por Lindemann, quien demostró que π es trascendental, es decir, que no puede ser la raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales y sólo un número finito de términos, más de ochenta años después de Legendre, después de haber demostrado que π y π^2 eran irracionales, y reflexionando sobre la historia de la incapacidad de cuadrar el círculo, hizo exactamente la misma sugerencia.

Puesto que cada número construido con regla y brújula satisface tal ecuación, ninguna construcción de este tipo tendrá éxito en cuadrar el círculo.

La prueba de Lindemann, apropiadamente, usó la hermosa relación de Euler.

π ha perdido algo de su misterio, pero poco de su fascinación. Ya no es de extrañar que π aparezca, por ejemplo, en un problema de probabilidad.

El conde Georges Buffon (1707-1788), el biólogo, que también tradujo Newton sobre cálculo al francés, demostró que, si se deja caer una aguja desde una altura al azar sobre una superficie paralela y reglada, la longitud de la aguja es igual a la distancia entre las líneas, entonces la probabilidad de que la aguja caiga a través de una línea es de 2/π.

¿Por qué aparece π en la respuesta? En este caso, debido a que el problema se refiere a los ángulos, que se refieren a las relaciones trigonométricas, que se refieren a π…

Varios investigadores han realizado experimentos para probar esta conclusión. De Morgan registra que uno de sus alumnos hizo 600 pruebas y obtuvo π = 3,137.

Resultados de series infinitas involucran a π en sus sumas. No son menos hermosas por ser bien comprendidas.

Estas son tan sorprendentes como bonitas:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7 \times 8} - \cdots$$

Este es un resultado más importante:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Si sólo se usan los números impares:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

Euler calculó primero las sumas de las potencias pares de los recíprocos, hasta la potencia 26:

$$\frac{1}{1^{26}} + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \cdots = \frac{2^{24} \times 76977927 \times \pi^{26}}{27!}$$

$\pi^2/6$ es también igual a este producto infinito, a través de todos los primos, también descubiertos por el prolífico Euler:

$$\frac{2^2}{2^2 - 1} \times \frac{3^2}{3^2 - 1} \times \frac{5^2}{5^2 - 1} \times \frac{7^2}{7^2 - 1} \times \frac{11^2}{11^2 - 1} \times \ldots$$

El genio indio Srinivasa Ramanujan, que tenía mucho en común con Euler, produjo algunas extraordinarias sumas infinitas y aproximaciones a π. Por un argumento geométrico que encontró

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} = 3{,}14159265262\ldots$$

También dio

$$\frac{63}{25}\left(17 + 15\sqrt{5}\right)/\left(7 + 15\sqrt{5}\right)$$

y el extraordinario

$$2\pi\sqrt{2} = \frac{99^2}{1103}$$

correcto a 9 y 8 lugares respectivamente.

El método más reciente para calcular π, que fue utilizado por Tamura y Kanada para su cálculo a 16 millones de lugares, se basa en el estudio de Gauss de la media aritmética-geométrica de dos números.

En lugar de utilizar una suma o producto infinito, el cálculo gira y gira en un bucle. Tiene la asombrosa propiedad de que el número de dígitos correctos se duplica aproximadamente con cada circuito del bucle, de modo que dar la vuelta sólo 19 veces ¡da π correcta a más de 1 millón de decimales!

Aquí hay un bucle simple para calcular π:

Los pasos deben seguirse en secuencia, hasta

$$\frac{(A+B)^2}{4C},$$

que es la primera aproximación a π. Luego regresa como indica la flecha al primer paso y volver a dar la vuelta. Los signos de igualdad significan ‘para____ sea ____’ en lugar de igualdad como en una ecuación, así que la primera instrucción dice ‘para Y sea A’.

$$Y = A$$

$$A = \frac{A+B}{2}$$

$$B = \sqrt{BY}$$

$$C = C - X(A-Y)^2$$

$$X = 2X$$

$$\text{PRINT } \frac{(A+B)^2}{4C}$$

Los valores iniciales son, $A = X = 1$, $B = 1$ l/√2 y $C = 1/4$.

Aquí están los valores de π después de dar la vuelta sólo 3 veces en una calculadora de bolsillo. ¡Ya es correcto con 5 decimales!

vueltas   Aproximación a π

1	2,9142135
2	3,1405797
3	3,1415928

3,162 277 660 168 379 331 998 893 544 432 718 533 719... = $\sqrt{10}$

3,321 928... = $\log_2 10$

Para descubrir el número de dígitos de una potencia de 10, cuando se expresa en notación binaria, multiplique el índice por este número, y tome el siguiente número entero más alto.

Así 1000 = 10^3; 3,321928... × 3 es aproximadamente 9,96, así que 1000 en base 10 será en binario de 10 dígitos. De hecho, 1000_{10} = 1111101000_2.

4

El primer número compuesto, el segundo cuadrado y el primer cuadrado de un primo.

Los pitagóricos llamaban a los números divisibles por 4, par-par. Por esta razón, 4, y también 8, estaban asociados con la armonía y la justicia, en contraste con las escalas que simbolizan la justicia en el derecho occidental moderno.

4 también es asociado por los pitagóricos con los tetraktos, el esquema de los primeros 4 números dispuestos en un triángulo.

Ellos postularon 4 elementos, tierra, aire, fuego y agua, simbolizados respectivamente por el cubo, octaedro, tetraedro e icosaedro. El sólido platónico restante, el dodecaedro, estaba asociado a la esfera de las estrellas fijas, y más tarde a la quintaesencia de los alquimistas medievales.

El temperamento de una persona estaba determinado por combinaciones de 4 humores.

Siendo de 2 por 2, hay 4 puntos cardinales de la brújula y 4 esquinas del mundo, y 4 vientos.

En el Antiguo Testamento había 4 ríos del paraíso, uno para cada dirección, que se supone que prefiguran los 4 evangelios del Nuevo Testamento.

El cuadrivium de Platón dividía las matemáticas, en su sentido general de conocimiento superior, en lo discreto y lo continuo. El discreto absoluto era aritmético, el discreto relativo era música. El continuo estable era la geometría y el continuo en movimiento, la astronomía.

Los intervalos musicales más agradables se asocian con las proporciones de los números del 1 al 4.

Los griegos también asociaron 4 con objetos sólidos, a pesar de su asociación entre 3 y volumen. Siguieron la progresión natural, 1 por un punto, 2 por una línea, 3 por una superficie y 4 por un sólido.

El sólido platónico más simple, el tetraedro, tiene 4 vértices y 4 caras.

Un cuadrado tiene 4 bordes y 4 vértices. Un cubo tiene caras cuadradas, mientras que su doble, el octaedro, tiene 4 caras alrededor de cada vértice.

Con 2^2, una figura plana con simetría bilateral sobre dos líneas diferentes se divide en 4 partes congruentes.

El espacio-tiempo de Einstein es de cuatro dimensiones. Sin embargo, en teorías recientes, 4 dimensiones son insuficientes.

Una hipérbola puede ser dibujada a través de cualesquiera 4 puntos en el plano, de los cuales no hay tres colineales.

Cada entero es la suma de un máximo de 4 cuadrados. Este célebre teorema puede haber sido conocido empíricamente por Diofante. Bachet lo probó con éxito hasta 120 y lo declaró en su edición de Diofante, a la que añadió algo de su propio material.

Fue estudiado por Fermat y Euler, que no lograron resolverlo, y finalmente fue demostrado por Lagrange en 1770.

Sólo una sexta parte de todos los números, los de la forma $4^n(8m + 7)$, sin embargo, requieren 4 cuadrados. El resto es la suma de un máximo de 3 cuadrados.

Ferrari resolvió primero ecuaciones de 4º grado. Su solución fue publicada por Cardán en su Ars Magna.

La ecuación general de un grado superior no puede resolverse mediante el uso de radicales.

El problema de los 4 colores

Durante más de un siglo, la conjetura de los cuatro colores fue uno de los grandes problemas no resueltos de las matemáticas. Algunos matemáticos todavía dirían que no se ha resuelto satisfactoriamente.

En octubre de 1852, Francis Guthrie coloreaba un mapa de Inglaterra. De repente se le ocurrió preguntarse cuántos colores se necesitaban si, como es natural, no se daba el mismo color a dos condados adyacentes. Supuso que la respuesta era 4.

Fue publicado en 1878, poniendo en marcha una extraña, pero no atípica secuencia de eventos.

Kempe pensó que lo había probado en 1879, pero once años más tarde se demostró que su prueba era defectuosa. Mientras tanto, en 1880, la conjetura había sido demostrada de nuevo, pero esta prueba también era defectuosa.

Sin embargo, estos intentos fueron valiosos para profundizar la comprensión del problema por parte de los matemáticos. De hecho, muchos conceptos importantes de la teoría de gráficos se desarrollaron a través de ataques a este problema, que sin embargo resultó ser extremadamente resistente.

La solución fue finalmente lograda en 1976 por Wolfgang Haken y Kenneth Appel, quienes transformaron el problema en un conjunto de subproblemas que podían ser verificados por computadora.

Los matemáticos han sido escépticos debido al largo razonamiento matemático involucrado, y el tiempo, 1200 horas, en la computadora. La existencia misma de una prueba que pocos matemáticos serán capaces de comprobar es un fenómeno reciente en matemáticas. Otro ejemplo del mismo proceso es la clasificación de grupos finitos. Esta clasificación ya está completa, pero la prueba completa se extiende a lo largo de miles de páginas en diferentes revistas publicadas a lo largo de los años. Esto contradice la idea tradicional de una prueba como medio disponible para confirmar una tesis y persuadir a otros de que es cierta.

4 es excepcional en no dividir $(4 – 1)! = 3!$. Es el único compuesto n que no divide $(n – 1)!$

El problema de Brocard pregunta: ¿Cuándo es $n! + 1$ un cuadrado?: 4! + 1 = 5*2*.

Un número es divisible por 4 si el número representado por sus dos últimos dígitos es divisible por 4.

Comenzando con cualquier número, forme un nuevo número sumando los cuadrados de sus dígitos. Repita.

Este proceso eventualmente se atasca en 1, o gira alrededor de un bucle del cual 4 es el miembro más pequeño: 4 - 16 - 37 - 58 - 89 - 145 - 42 - 20 - 4...

Si un número en la base 10 es un múltiplo de su inverso, su relación es 4 o 9.

4 es el único número igual al número de letras en su expresión normal en inglés: 'four'.

4,123 105...

$\sqrt{17}$, la raíz más alta que fue probada irracional por Teodoro.

5

Los pitagóricos asociaron el número 5 con el matrimonio, porque es la suma de lo que fue para ellos el primer número par, femenino, 2, y el primer número impar, masculino, 3.

5 es la hipotenusa del triángulo pitagórico más pequeño, es decir, un triángulo en ángulo recto con lados enteros.

Los pitagóricos también asociaron este triángulo con el matrimonio y el teorema de Pitágoras a veces se llamaba el Teorema de la Novia. Los lados 3 y 4 se asociaron con el macho y la hembra respectivamente, y la hipotenusa, 5, con la descendencia.

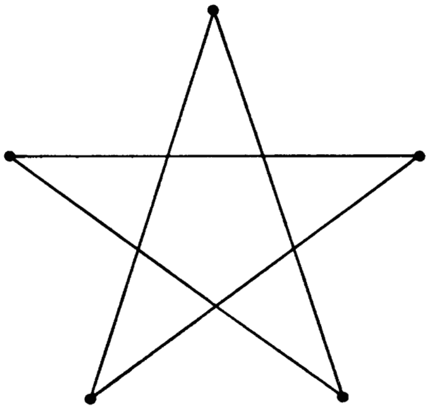
El triángulo 3-4-5 es el único triángulo pitagórico cuyos lados están en progresión aritmética, y el único cuya área es la mitad de su perímetro.

El pentagrama místico, tan importante para los pitagóricos, era conocido en Babilonia y probablemente importado de allí.

El Pentagrama se asoció con la división de la línea en extrema y media proporción, la Sección Áurea, y también con el cuarto de los sólidos regulares, el dodecaedro, cuyas caras son pentágonos regulares. Los primeros pitagóricos no conocían el quinto sólido platónico regular, el icosaedro.

Al construir un *nido* de pentagramas dentro de un pentágono regular, es relativamente fácil demostrar que la sustracción de los lados y diagonales puede continuar indefinidamente. Se ha sugerido que este patrón llevó a la idea de que algunas longitudes son inconmensurables.

Los pitagóricos, según Plutarco, también llamados 5 natural, porque cuando se multiplica por sí mismo, termina en sí mismo. Es decir, todas las potencias de 5 terminan en el dígito 5. Sabían que 6 comparte esta propiedad, pero no otro dígito.



En la terminología moderna, 5 y 6 son los números automorfos más pequeños.

5 es la suma de dos cuadrados, $5 = 1^2 + 2^2$, como cualquier hipotenusa de un triángulo pitagórico.

Es también un primo, el primero, de la forma $4n + 1$, de lo que se deduce que es la suma de dos cuadrados de una sola manera.

5 es el primer primo de la forma $6n - 1$. Todos los primos son uno más o uno menos que un múltiplo de 6, excepto 2 y 3.

Pappus mostró cómo construir una cónica a través de cualquiera de los 5 puntos del plano, de los cuales 3 son colineales.

5 es el segundo número de Fermat y el segundo primo de Fermat: $5 = 2^2 + 1$. Sólo se sabe que existan 5 primos de Fermat.

El 5to número de Mersenne, $2^5 - 1 = 31$ y es primo, el tercero en serlo, dando lugar al tercer número perfecto, 496.

5! + 1 es un cuadrado.

Cada número es la suma de 5 cubos positivos o negativos en un número infinito de vías.

La ecuación algebraica general del 5to grado no puede ser resuelta en radicales. Probado por primera vez por Abel en 1824.

Lamé mostró que el algoritmo euclidiano para encontrar el factor común más alto de dos números toma en la base 10 como máximo 5 veces más pasos que los dígitos en el número más pequeño.

5 es miembro de dos pares de primos gemelos, 3 y 5, y 5 y 7.

5-11-17-23 es la secuencia más pequeña de 4 primos en progresión aritmética. Agregue el primo 29 para formar el conjunto más pequeño de 5 primos en progresión aritmética.

5 es probablemente el único número impar intocable.

El volumen de la unidad 'esfera' en el hiperespacio aumenta hasta un espacio de 5 dimensiones, y disminuye a partir de entonces.

Contando con 5s

Esto puede parecer una base natural para un sistema de conteo, ya que tenemos 5 dedos por mano. Sin embargo, sólo un idioma utiliza un sistema de conteo basado exclusivamente en el 5, el saraveca, un idioma sudamericano arahuaco, aunque el 5 tiene un significado especial en muchos sistemas de conteo basados en el 10 y el 20. Por ejemplo, en muchos idiomas centroamericanos, los números del 6 al 9 se expresan como 5 + 1, 5 + 2 y así sucesivamente.

Los romanos usaban V = 5, L = 50 y D = 500, así que 664 era DCLXII. (La idea de poner una I antes de V para representar 4, o una I antes de X para 9, por ejemplo, que hace que los números sean más cortos para escribir mientras que los hace más confusos para la aritmética, casi nunca fue utilizada por los propios romanos y se hizo popular en Europa sólo después de la invención de la impresión).

Divisibilidad

Debido a que 5, como 2, es un factor de 10, las fracciones decimales como 1/20, cuyos denominadores son productos de 2s y 5s solamente, tienen expansiones decimales finitas y no recurren.

Más precisamente, si $n = 2^p5^q$, entonces la longitud de $1/n$ como decimal es la mayor de p y q.

Si $1/m$ es un decimal recurrente, y $1/n$ termina, entonces $1/mn$ tiene una parte no periódica cuya longitud es la de $1/n$, y una parte recurrente cuya longitud es el período de $1/m$.

Los sólidos platónicos

Hay 5 sólidos platónicos, el tetraedro regular, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro, todos excepto el cubo que lleva el nombre de la palabra griega por su número de caras.

Todos eran conocidos por los griegos. Theaetetus, un alumno de Platón, mostró cómo inscribir los dos últimos en una esfera. Euclides mostró, considerando los posibles arreglos de polígonos regulares alrededor de un punto, que no hay más de 5.

Kepler los usó, con la confianza típica en sus propiedades místicas, para explicar los tamaños relativos de las órbitas de los planetas:

La órbita de la tierra es la medida de todas las cosas; circunscribe alrededor de ella un dodecaedro, y el círculo que lo contiene será Marte: circunscribe alrededor de Marte un tetraedro, y el círculo que lo contiene será Júpiter: circunscribe alrededor de Júpiter un cubo, y el círculo que lo contiene será Saturno. Ahora inscribe en la tierra un icosaedro, y el círculo contenido en él será Venus; inscribe en Venus un octaedro, y el círculo contenido en él será Mercurio. Ahora tienes la razón del número de planetas.

La idea de un poliedro puede extenderse a más de tres dimensiones, del mismo modo que un poliedro puede considerarse un polígono tridimensional.

Hay 5 celdas en el politopo regular de 4 dimensiones más simple, llamado el simplex, que también tiene 10 caras, 10 bordes y 5 vértices, de modo que es auto-dual.

La secuencia Fibonacci

5 es el quinto número de Fibonacci.

Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, discutió en su *Liber Abaci* este problema:

Un hombre puso un par de conejos en un lugar rodeado por todos lados por una pared. ¿Cuántas parejas de conejos se pueden producir de esa pareja en un año si se supone que cada mes cada pareja engendra una nueva pareja que a partir del segundo mes se vuelve productiva?

Asumiendo que los conejos son inmortales, el número al final de cada mes sigue esta secuencia. (Leonardo omitió el primer término, suponiendo que la primera pareja crió inmediatamente.)

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233...

Fue bautizada con el nombre de secuencia Fibonacci por Eduard Lucas en 1877, cuando la utilizó, y otra secuencia que ahora lleva su nombre, para buscar primos entre los números de Mersenne.

Es una de las curiosas coincidencias que se dan en la historia de las matemáticas que un problema con los conejos genere una secuencia de números de tal interés y fascinación. Los conejos, por supuesto, no vuelven a aparecer en su historia.

Su primera y más simple propiedad es que cada término es la suma de los dos términos anteriores. Así, el próximo término será 144 + 233 = 377. Esto seguramente lo sabía Fibonacci, aunque no lo dice en ninguna parte. Los matemáticos no siempre dicen lo obvio.

Kepler creía que casi todos los árboles y arbustos tienen flores de cinco pétalos y, en consecuencia, frutas de cinco compartimentos. Naturalmente asoció este hecho con el pentágono regular y la Divina Proporción. Él continúa:

> Está arreglado de tal manera que los dos términos menores de una serie progresiva que se suman constituyen la tercera... y así sucesivamente hasta el infinito, ya que la misma proporción continúa ininterrumpidamente. Es imposible dar un ejemplo perfecto en números redondos. Sin embargo... Deje que los números más pequeños sean 1 y 1, que usted debe imaginar como desiguales. Súmelos, y la suma será 2: sume a este 1, resultando 3; sume 2 a esto, y obtenga 5; sume 3, obtendrá 8... Así como 5 es a 8, así 8 es a 13, aproximadamente, y como 8 es a 13, así 13 es a 21, aproximadamente.

Esta afirmación difícilmente podría ser más clara, pero no fue hasta 1753 que el matemático escocés Robert Simson declaró explícitamente por primera vez que las proporciones de los términos consecutivos tienden a un límite, que es φ, la Relación Aurea. Estas son las primeras proporciones: 1/1 2/1 3/2 5/3 8/5 13/8 21/13 34/21 55/34 89/55 144/89 233/144...

Las proporciones sucesivas son alternativamente menores y mayores que la Proporción Áurea. Después de 12 términos, la coincidencia con φ es correcta con 4 decimales. Para valores mucho más altos, la secuencia de Fibonacci coincide con la secuencia geométrica φ^n muy estrechamente.

(Esto es sólo una consecuencia de la regla de que cada término es la suma de los dos términos precedentes. Comience con dos números cualesquiera, construya una serie generalizada de Fibonacci, añadiendo términos sucesivos para obtener el siguiente, y su relación tenderá a φ.)

Más precisamente, como Binet descubrió en 1843, el número *n*-ésimo de Fibonacci está dado por la fórmula:

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \times \sqrt{5}}$$

Existe otra versión de esta fórmula, que es más fácil de usar en la práctica. Porque

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

es sólo 0,618... cuando $n = 1$ y rápidamente se vuelve muy pequeño de hecho, F_n es en realidad el entero más cercano a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1}\right)^n$$

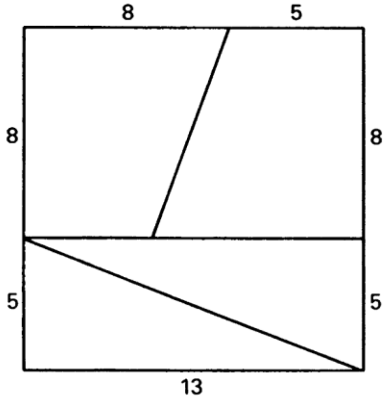
Por ejemplo, F_8 es la parte entera de 21,00952... que es 21.

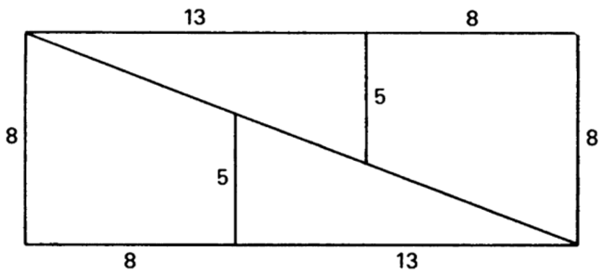
Simson también descubrió la identidad: $F_{n-1}\, F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, que es la base de un truco desconcertante presentado por primera vez por Sam Loyd.

Dibujar en papel cuadriculado un cuadrado cuyo lado es un número Fibonacci con subíndice impar, digamos 8. Dividirlo como se muestra, y las piezas se pueden volver a ensamblar para formar un rectángulo con un área de 65. ¿De dónde viene el cuadrado extra?

En ninguna parte, por supuesto. La diagonal de la segunda figura es en realidad dos mitades de un paralelogramo largo y delgado, con área 1 unidad. Parece ser una verdadera recta sólo porque las pendientes de los dos lados, 3/8 y 2/5, son muy similares. Si hubiéramos empezado con un número de Fibonacci más alto, digamos, 21, la ilusión estaría aún más cerca y sería aún más convincente.

El número de identidades de Fibonacci es literalmente infinito.





Lucas descubrió una relación entre los números de Fibonacci y los coeficientes binomiales:

$$\mathrm{F}_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$$

Por ejemplo:

$$F_{12} = 144 = \binom{11}{0} + \binom{10}{1} + \binom{9}{2} + \binom{8}{3} + \binom{7}{4} + \binom{6}{5}$$
$$= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6$$

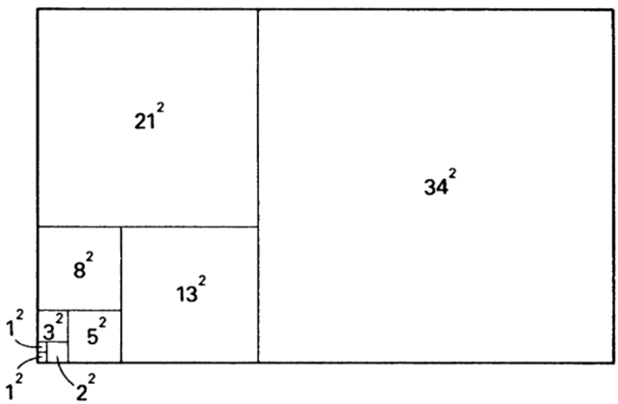
Catalan mostró un resultado similar:

$$2^{n-1}F_n = \binom{n}{1} + 5\binom{n}{3} + 5^2\binom{n}{5} + \cdots$$

Las sumas de los primeros *n* términos, y de los términos con subíndices pares y subíndices impares pueden expresarse muy bien:

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_n \quad = F_{n+2} - 1$
$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots F_{2n-1} \quad = F_{2n}$
$F_1 + F_4 + F_6 + F_8 + \ldots F_{2n} \quad = F_{2n+1} - 1$

De igual modo, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$, que puede ser bien ilustrado en una figura, que naturalmente es casi idéntica a la de la página 39: las proporciones de la siguiente figura, 55 : 34 son ya una aproximación razonable a φ.



Hay muchas más identidades similares a las de Simson, tales como:

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \text{ o } F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$$

Charles Raine conectó ingeniosamente los números de Fibonacci con los triángulos pitagóricos: Tome cualesquiera 4 números de Fibonacci consecutivos; el producto de los términos externos y dos veces el producto de los términos internos son los catetos de un triángulo pitagórico: por ejemplo, 3, 5, 8, 13, da los dos catetos, 39 y 80, del triángulo rectángulo 39-80-89. ¡La hipotenusa, 89, es también un número de Fibonacci! Su subíndice es la mitad de la suma de los subíndices de los cuatro números originales. Finalmente, el área del triángulo es el producto de los cuatro números originales, 1.560.

(Por cierto, no hay cuatro términos de la secuencia de Fibonacci que puedan estar en progresión aritmética.)

Las sumas de las dos series

$$\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 5}-\frac{1}{5\times 8}\dots$$

y

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 21}+\frac{1}{21\times 55}+\cdots$$

son iguales a φ^{-2}.[Pincus Schue]

El recuento de los números de Fibonacci entre n y $2n$ es 1 o 2, y el recuento de los números de Fibonacci que tienen el mismo número de dígitos es 4 o 5. [K. Subba Rao]

Los números de Fibonacci poseen propiedades de divisibilidad muy elegantes. Considere dos números, m y n. Si m divide n, entonces F_m divide F_n. Si el factor común más alto de p y q es r, entonces el factor común más alto de Fp y Fq es Fr. Por lo tanto, dos números Fibonacci consecutivos son coprimos.

Cada número primo divide un número infinito de términos de la secuencia. De hecho, si $p = \pm 1$ mod 5, entonces F_{p-1} es divisible por p, y si $p = \pm 2$ mod 5, entonces F_{p+1} es divisible por p.

Si m es cualquier número, entonces entre los primeros números de Fibonacci de m^2 hay uno divisible por m.

Si F_n es primo, entonces n debe ser primo, con una excepción: $F_4 = 3$, 3 es primo, pero 4 no lo es. Sin embargo, lo contrario es falso.

La secuencia de Fibonacci también está relacionada de manera sorprendente con el crecimiento de las plantas. Kepler puede haberse dado cuenta de esto. Él escribe:

Es en la semejanza de esta serie autodesarrollada que, en mi opinión, se forma la facultad de propagación; y así, en una flor, se muestra la imagen auténtica de esta facultad, el pentágono. Paso por alto todos los demás argumentos que una deliciosa rumia podría aducir como prueba de ello.

¿Cuáles fueron los otros argumentos de Kepler? No lo dice, pero en el siglo XIX Schimper y Braun investigaron la filotaxis, los arreglos de hojas alrededor de un tallo.

Las hojas crecen en espiral, de manera que los ángulos entre cada par de hojas sucesivas son constantes. Los ángulos más comunes son 180°, 120°, 144°, 135°, 138°27’, 137°8’, 137°38’, 137°27’, 137°31’, ... que parecen estar llegando a un límite.

Lo que ese límite se hace más claro cuando se expresan como proporciones de un círculo completo.

Estas relaciones son, respectivamente, 1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21, 13/34, 21/55 y 34/89: las relaciones de los miembros alternos de la serie de Fibonacci.

Para decirlo de otra manera, el numerador y denominador de cada nueva fracción son sumas de los numeradores y denominadores de las dos fracciones anteriores. Estas relaciones tienden al valor límite φ^{-2}, y el ángulo límite es aproximadamente 137°30’28”, lo que divide la circunferencia de un círculo en la Relación Aurea.

Las proporciones más pequeñas, 1/2 y 1/3, se encuentran en pastos y juncias, pero por lo demás no son muy comunes, aunque son más comunes que 1/4 y 1/5, que existen y forman parte de otra secuencia de tipo Fibonacci.

Los arreglos de hojas más frecuentes son 2/5, que se encuentran en las rosas, y 3/8. Sin embargo, proporciones mucho más altas aparecen mucho más claramente en las escamas de un cono de abeto o en los flósculos de un girasol, que están muy juntos. El embalaje es muy regular, formando conjuntos de filas en espiral, o parastichies, dos de los cuales son más prominentes que el resto.

La piña suele tener 8 y 13 parastichies. Un girasol puede tener desde 21/34 hasta 89/144. Incluso 144/233 ha sido reclamado para una planta gigante.

(Aunque las plantas de la misma especie e incluso de la misma familia tienden a tener los mismos números de parastichie, los números más altos especialmente varían de planta a planta. La filotaxis puede incluso cambiar a medida que la planta crece, comenzando con una proporción baja como 1/2 o 1/3 y luego cambiando a proporciones más altas.)

¿Por qué las plantas crecen así? Menos fascinados por los números de Fibonacci que los matemáticos, los botánicos están más interesados en una explicación, en la que todavía no están de acuerdo.

Una teoría plausible, que podría explicarse por la inhibición química del crecimiento, es que cada primordio, la yema primitiva de la hoja, se desarrolla en la mayor brecha disponible. Sea lo que sea que decidan los botánicos, los matemáticos continuarán deleitándose en esta conexión entre los conejos y las plantas que comen.

Los números de Fibonacci tienen otros usos en matemáticas más avanzadas.

El ruso Matasyevic utilizó Fibonacci para resolver finalmente el décimo problema de Hilbert. No existe ningún algoritmo que, dada cualquier ecuación Diofantica, decida dentro de un número finito de pasos si tiene una solución. Aprovechó la velocidad a la que aumenta la secuencia de números de Fibonacci.

También han encontrado recientemente otros usos en la informática, en el diseño de algoritmos eficientes para la construcción y búsqueda de tablas de datos, por ejemplo.

Johannes Kepler, *The Six-cornered Snowflake*, Oxford University Press, Oxford, 1966.

5,256 946 404 860...

Los ‘volúmenes’ aproximados de las ‘esferas’ de la unidad en dimensiones desde 1 en adelante son:

dim 1	dim 2	dim 3	dim 4	dim 5	dim 6	dim 7	...
2	3,1	4,1	4,9	5,263	5,1		

El volumen es un máximo en 5 dimensiones, y disminuye a partir de entonces.

Sin embargo, si la dimensión es considerada como una variable real, capaz de tomar valores no integrales, entonces el volumen máximo ocurre en el ‘espacio’ de esta dimensión, 5,256...

El volumen es entonces 5,277768... comparado con el volumen en 5 dimensiones de 5,263789... [David Singmaster]

6

El segundo número compuesto y el primero con dos factores distintos.

Por lo tanto, el primer número, aparte del 1, que no es el poder de un primo.

Los pitagóricos asociaban el matrimonio y la salud, porque es el producto de sus primeros números pares y primeros impares, que eran femeninos y masculinos respectivamente.

También representaba el equilibrio, simbolizado por dos triángulos, base a base.

Es el área y el semiperímetro del primer triángulo pitagórico, con lados, 3, 4, 5.

El primer número perfecto, definido por Euclides. Sus factores son 1, 2, 3 y 6 = 1 + 2 + 3.

Es el único número perfecto que no es la suma de cubos sucesivos. San Agustín escribió: ‘El seis es un número perfecto en sí mismo ...Dios creó todas las cosas en seis días porque este número es perfecto. Y se mantendría aunque no existiera el trabajo de seis días’. [Bieler]

6 es también igual a 1 × 2 × 3, y es por lo tanto el tercer factorial, 3! y también el segundo primorial.[5]

Ningún otro número es el producto de 3 números y la suma de los mismos 3 números.

1, 2, 3 es también el único conjunto de 3 enteros de tal manera que cada uno divide la suma de los otros dos.

6 también es igual a $\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$.

[5] El primorial de un número *n* se define como el producto de todos los números primos menores o iguales a él, y se indica como *n*#.

Es el único número que es la suma de exactamente 3 de sus factores, que es lo mismo que decir que 1 puede ser expresado únicamente como la suma de 3 fracciones unitarias, la más pequeña de las cuales es 1/6: 1 = 1/2 + 1/3 + 1/6.

6^2 termina en 6. El otro dígito con esta propiedad es 5.

Cada número primo mayor que 3 es de la forma $6n \pm 1$.

Cualquier número de la forma $6n - 1$ tiene dos factores cuya suma es divisible por 6.

6 es el 3er número triangular, y el único número triangular, aparte del 1, con menos de 660 dígitos cuyo cuadrado (36) es también triangular.

La siguiente propiedad se debe a Iamblichus. Tome 3 números consecutivos cualquiera, el mayor divisible por 3. Súmelos y sume los dígitos del resultado, repitiendo hasta que se alcance un solo número. Ese número será el 6.

El segundo y tercer sólidos platónicos, que son duales entre sí, el cubo y el octaedro, tienen 6 caras y 6 vértices respectivamente.

El primero, el tetraedro, tiene 6 bordes.

Politopos regulares

Hay 6 politopos regulares. Son los análogos en 4 dimensiones de los poliedros regulares en 3 dimensiones y los polígonos regulares en 2 dimensiones.

Cada politopo tiene vértices, bordes, caras y también celdas. Dos de ellos son autoduales, los otros forman dos pares duales.

nombre	*Número de celdas*	*Número de caras*	*Número de bordes*	*Número de vértices*
simplex	5	10	10	5
teseracto	8	24	32	16
16-celdas	16	32	24	8
24-celdas	24	96	96	24
120-celdas	120	720	1200	600
600-celdas	600	1200	720	120

6 círculos iguales pueden tocar otro círculo en el plano.

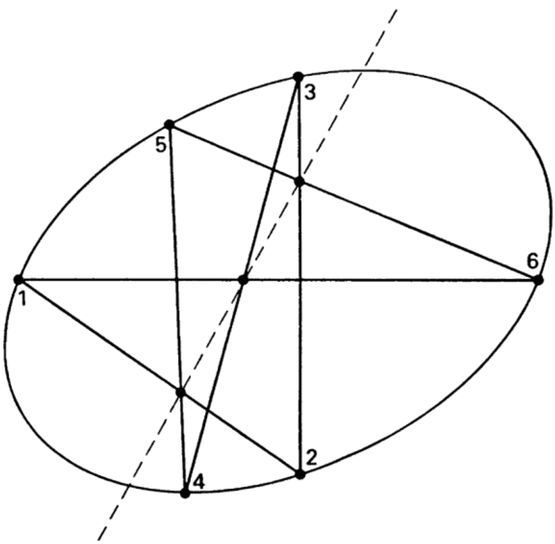
Uno de los 3 teselados regulares del plano está compuesto de hexágonos regulares.

Pappus discutió la inteligencia práctica de las abejas en la construcción de células hexagonales. Supuso que las celdas debían ser contiguas, para que no entrara ninguna materia extraña, debían ser regulares y, por lo tanto, triangulares, cuadradas o hexagonales, y concluyó que las abejas sabían que un hexágono que usara el mismo material contendría más que las otras formas.

Pappus, afirmando que el hombre tiene una mayor parte de sabiduría que las abejas, continuó mostrando que de todas las figuras regulares con el mismo perímetro, la que tiene el mayor número de lados tiene el área más grande, siendo el círculo el máximo limitante.

Kepler discutió la simetría de 6 pliegues de los copos de nieve (de papel, e intentó explicarlo considerando el empaquetamiento cercano de las esferas en un arreglo hexagonal.

Pascal descubrió en 1640 a la edad de 16 años su teorema del hexagrama místico. Si se eligen seis puntos en una sección cónica, etiquetada 1, 2, 3, 4, 5, 6, entonces las intersecciones de las líneas 12 y 45, 34 y 61, 56 y 23, estarán en línea recta.



Brianchon enunció el teorema dual, en el cual los 6 puntos originales son reemplazados por 6 tangentes a la cónica.

6,283 185... = 2π

La relación entre la circunferencia y el radio de un círculo. El número de radianes en un círculo completo.

7

7 días en una semana, y por lo tanto asociado con 14 y con 28 días en un mes lunar.

El 4º número primo, y el primero de la forma $6n + 1$.

El comienzo de una progresión aritmética de seis primos: 7, 37, 67, 97, 127, 157.

7 y 11 son el primer par de primos consecutivos separados por 4.

El tercer número de Mersenne, $7 = 2^3 - 1$, y el segundo número primo de Mersenne, que conduce al segundo número perfecto.

El primer número que no es la suma de un máximo de 3 cuadrados. La secuencia de estos números continúa, 15 23 28 31 39 47 55 60...

$7 = 3! + 1$. $n + 1$ es primo para n = 1, 2, 3, 11, 27, 37, 41, 73, 77, 116, 154, 320, 340, 399, 427, y ningún otro valor por debajo de 546.

El problema de Brocard. ¿Cuando es $n! + 1$ un cuadrado? Las únicas soluciones conocidas son n = 4, 5 y 7: $7! + 1 = 5041 = 71^2$.

El cociente de Fermat

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p}$$

es un cuadrado sólo cuando p es 3, o 7.

Lamé demostró en 1840 que la ecuación de Fermat, $x^7 + y^7 = z^7$ no tiene soluciones en números enteros.

Si a, b son los lados más cortos de un triángulo pitagórico, entonces 7 divide uno de a, b, $a - b$ o $a + b$.

Debido a que 7^2 está por debajo de 50 por sólo 1, 7 fue llamado por los griegos, la *diagonal racional* de un cuadrado de lado 5.

Todos los números suficientemente grandes son la suma de 7 cubos positivos.

Para comprobar si un número es divisible por 7: multiplique el dígito de la izquierda por 3 y sume el siguiente dígito. Repita tantas veces como sea necesario. Si la respuesta final es divisible por 7, también lo es el número original.

Alternativamente, comience multiplicando el dígito de la derecha por 5 y sumando el dígito adyacente. Repita como antes.

7 números son suficientes para colorear cualquier mapa en un toro. Sorprendentemente, esto se sabía antes de que la conjetura de los 4 colores se resolviera para los mapas planos.

Se requieren por lo menos 7 rectángulos si un rectángulo va a ser dividido en rectángulos más pequeños, ninguno de los cuales cabrá dentro de otro. El rectángulo más pequeño que se puede embaldosar 'incomparablemente' es de 13 por 22.[6]

También se necesitan al menos 7 rectángulos para dividir un rectángulo en rectángulos más pequeños de forma diferente, pero con la misma superficie.

Un triángulo de ángulo obtuso puede dividirse en no menos de 7 triángulos de ángulo agudo.

Básicamente hay 7 formas diferentes de simetría para el diseño de un friso.

El 7-gono regular es el más pequeño que no puede ser construido por la regla y el compás solamente.

7 es el primo más pequeño tal que el período de su recíproco en base 10 tiene longitud máxima. 1/7 = 0,142857142857... (*Ver* ***142.857***.)

El problema de San Ives

Esta rima de Mother Goose es bien conocida:

'Cuando iba a St. Ives, conocí a un hombre con siete esposas. Cada esposa tenía siete sacos, y cada saco tenía siete gatas, cada gata tenía siete

[6] A. C. C. C Yao y E. M. Reingold, *Journal of Recreational Mathematics*, vol 8.

gatitos. ‘Gatitos, gatas, sacos y esposas, ¿cuántos iban a St. Ives?’ El problema 79 del papiro Rhind, escrito por el escriba Ahmes, que data de alrededor del año 1650 a.C., afecta:

Casas	7
Gatas	49
Ratones	343
Hechizos	2401
Hekat	16807
TOTAL	19607

El parecido es notable. Además, hay una especie de vínculo de conexión. Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, en su *Liber Abaci* (1202 y 1228) también incluye el mismo problema. Pierce comenta que parece tener el mismo origen que la Casa que construyó Jack, y que Leonardo usa los mismos números que Ahmes y hace sus cálculos de la misma manera.

Es tentador suponer que este problema tiene más de 3500 años de antigüedad, y que ha sobrevivido esencialmente sin cambios a lo largo de ese tiempo.[7]

8

El segundo cubo: $8 = 2^3$. El único cubo que es uno menos que un cuadrado $8 = 3^2 - 1$ y la única potencia que difiere en 1 de otra potencia primaria.

El sexto número de Fibonacci, y el único número de Fibonacci que es un cubo, aparte del 1.

El número de piezas en las que se divide el espacio tridimensional por 3 planos generales.

Hay 8 notas en una octava.

El primer número en secuencia alfabética en inglés.

---

[7] R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1972; y Charles Pierce, citado por Carolyn Eisele en ‘Liber Abaci’, *Scripta Mathematica*, vol. 17.

Es posible colocar el máximo de 8 reinas en un tablero de ajedrez, para que ninguna reina ataque a otra, de 12 maneras esencialmente diferentes.

8 veces cualquier número triangular es 1 menos que un cuadrado.

Un número es divisible por 8 si el número formado por sus tres últimos dígitos es divisible por 8.

Cubos mágicos

Los cubos mágicos perfectos, en los que todas las filas, columnas y diagonales de cada capa, más las diagonales de espacio a través del centro, suman el mismo total, son imposibles para las órdenes 3 (3 × 3 × 3) y 4 (4 × 4 × 4). No se sabe si tales cubos pueden existir para las órdenes 5 y 6.

Los cubos mágicos existen para el orden 8. El primero fue publicado en forma privada en 1905, un método de construcción fue descubierto nuevamente a finales de la década de 1930, y en 1976 Martin Gardner publicó un ejemplo construido por Richard Myers.

Myers descubrió cómo construir un gran número de ellos superponiendo tres cubos latinos y usando la notación octal cuando era un colegial de 16 años.

Poco después de que Gardner informara sobre el descubrimiento de Myers, Richard Schroeppel y Ernst Straus encontraron independientemente cubos mágicos de orden 7.

Martin Gardner, *Scientific American*, enero de 1976.

El sistema octal

8 es la base del sistema octonario, octenario u octal.

Emmanuel Swedenborg, el filósofo danés, escribió un libro que abogaba por la base 8. Tiene mucho de la simplicidad del sistema binario.

Todos sus factores son poderes de 2, pero los números de un tamaño razonable no requieren un número absurdamente grande de dígitos para expresarse. 100 en base 10 es 144 en base 8 y 1100100 en binario. El binario es mucho más difícil de recordar (siempre una gran desventaja a efectos prácticos) y más largo, aunque se puede obtener instantáneamente del octal 144 sustituyendo los dígitos por su expresión binaria. 1-4-4 se convierte en 1-100-100 o 1100100.

Los argumentos para cambiar completamente a la base 8 son más débiles que para cambiar a duodecimal. Pero debido a la conexión con el binario, éste tiene ha sido utilizado ampliamente en ordenadores, aunque desde que se introdujo la serie IBM 360 a principios de los años 60, utilizando la base 16 (hexadecimal), ha caído en desgracia.

Un deltaedro es un poliedro cuyas caras son triangulares.

Hay un número ilimitado de ellos, ya que cualquier deltaedro tiene caras expuestas a las que puede unirse otra pirámide triangular. Sin embargo, sólo 8 de ellos son convexos. 3 de estos son el tetraedro, octaedro e icosaedro regulares. 2 más son un par de tetraedros pegados cara a cara, y un par de pirámides pentagonales pegadas cara a cara.

El octaedro tiene 8 caras triangulares, y 6 vértices y 12 bordes, lo que lo convierte en el doble del cubo, que tiene 8 vértices, 6 caras y 12 bordes.

Así, si los 6 puntos medios de las caras de un cubo se unen, forman un octaedro. Por el contrario, los 8 puntos medios de las caras de un octaedro se unen para formar un cubo.

9

El tercer cuadrado, y por lo tanto la suma de dos números triangulares consecutivos: $9 = 3 + 6$.

Escrito como '100' en la base 3.

La primera potencia prima impar, y con 8 las únicas que se sabe que difieren en 1.

El único cuadrado que es la suma de dos cubos consecutivos: $9 = 1^3 + 2^3$. El 4º número afortunado, y el primer número afortunado cuadrado aparte del 1.

$9 = 1! + 2! + 3!$

El número Kaprekar más pequeño aparte de 1: $9^2 = 81$ y $8 + 1 = 9$.[8]

9 es subfactorial 4 (!4).[9]

---

[8] Un número de Kaprekar (Por: Shri Dattatreya Ramachandra Kaprekar, 1905–1986, matemático Indio) es aquel entero no negativo tal que, en una base dada, los dígitos de su cuadrado en esa base pueden ser separados en dos números que sumados dan el número original (*Wikipedia*).

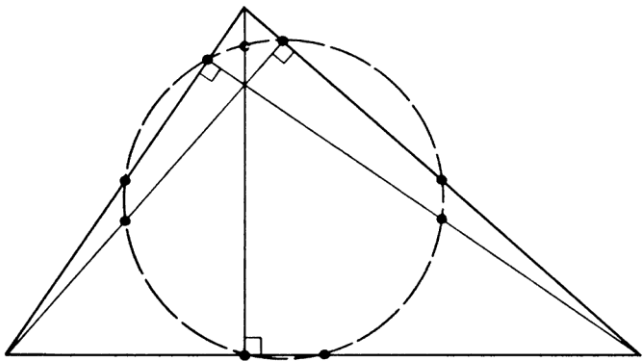
[9] Subfactorial de un número natural *n*, a veces escrito como !*n*, es el número de posibles

Hay 9 poliedros regulares, los 5 sólidos platónicos y los 4 poliedros estrellados Kepler-Poinsot.

9 es el número más pequeño de cuadrados integrales distintos en los que se puede dividir un rectángulo. La solución más pequeña es 32 por 33 y los cuadrados tienen lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 y 18.

El Feuerbach, o círculo de nueve puntas.

En 1820 Brianchon y Poncelet demostraron que la base de las altitudes, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos de las altitudes, desde los vértices hasta el punto de intersección, se encuentran todos sobre un círculo. Dos años más tarde, Feuerbach demostró que este círculo también toca los tres círculos inscritos y escritos del triángulo y, en consecuencia, a menudo se le conoce como el círculo de Feuerbach.



Debido a que 9 es uno menos que la base de nuestro sistema de conteo habitual, hay una simple prueba de divisibilidad por 9: 9 divide un número si y sólo si divide la suma de los dígitos del número.

desarreglos (permutación donde ninguno de sus elementos aparece en la posición original) de un conjunto con *n* elementos. En términos concretos, el subfactorial cuenta el número de formas diferentes en que *n* personas podrían cambiar por ejemplo: regalos, donde cada persona da un regalo a otra persona, y cada uno recibe exactamente otro regalo (*Wikipedia*).

Las sumas aritméticas pueden ser comprobadas por el proceso llamado ‘expulsar nueves’. Esto llegó a Europa de los árabes, pero probablemente fue un invento de la India. Leonardo de Pisa lo describió en su *Liber Abaci*. Cada número de una suma se sustituye por la suma de sus dígitos. (Originalmente fue reemplazado por el resto al dividirlo por 9, lo cual es un largo camino para llegar al mismo resultado.)

Si la suma original es correcta, también lo será la misma cuando se realice sólo con las sumas de dígitos.

¿Qué encaja mejor, una clavija redonda en un agujero cuadrado o una clavija cuadrada en un agujero redondo? Esto puede ser interpretado como, ¿qué es más grande, la relación entre el área de un círculo y su cuadrado circunscrito, o el área de un cuadrado y su círculo circunscrito?

En 2 dimensiones, estas relaciones son $\pi/4$ y $2/\pi$ respectivamente, por lo que una clavija redonda encaja mejor en un agujero cuadrado que una clavija cuadrada en un agujero redondo.

Sin embargo, este resultado sólo es cierto en dimensiones inferiores a 9.

Para $n \geq 9$ el cubo de unidades *n*-dimensionales se ajusta más estrechamente a la esfera de la unidad *n*-dimensional que al revés.[10]

No hay configuraciones de 7 u 8 líneas de manera que haya 3 puntos en cada línea y tres líneas a través de cada punto que puedan ser realizadas geométricamente.

Hay 3 configuraciones esencialmente diferentes con 9 líneas. El primero de ellos es la configuración del teorema de Pappus, que es un caso especial del hexagrama místico de Pascal.

El problema de Waring

En 1770 Edward Waring escribió en sus *Meditationes algebraicae:* ‘Cada número integral es un cubo, o una suma de dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve cubos; es además un bicuadrado o es una suma de dos, tres, etc., hasta diecinueve bicuadrados, y así sucesivamente’.[11]

---

[10] David Singmaster, ‘On Round Pegs in Square Holes and Square Pegs in Round Holes’, *Mathematics Magazine*, vol. 37.

[11] *Scripta Mathematics*, vol. 7.

Este difícil problema aún no se ha resuelto completamente, aunque Hilbert demostró que para cada potencia, k, existe un número, $g(k)$, de modo que cada número suficientemente grande puede ser representado por un máximo de $g(k)$ k-esima potencias.

No todos los números, por supuesto, son 'suficientemente grandes' y sigue siendo un problema determinar qué números para cada potencia k requieren más que $g(k)$ poderes para representarlos.

La advertencia era correcta sobre los cubos, aunque sólo un conjunto finito de números realmente requiere 9, y tenía razón sobre las 4ª potencias, aunque de nuevo, 19 es más que suficiente para todos excepto para un conjunto finito de números.

Cuadrados mágicos

Los primeros 9 números se pueden organizar en un cuadrado mágico de modo que todas las filas, columnas y ambas diagonales tengan la misma suma, 15. Esto puede hacerse esencialmente de una sola manera, ya que todas las soluciones están relacionadas entre sí por medio de reflexiones y rotaciones.

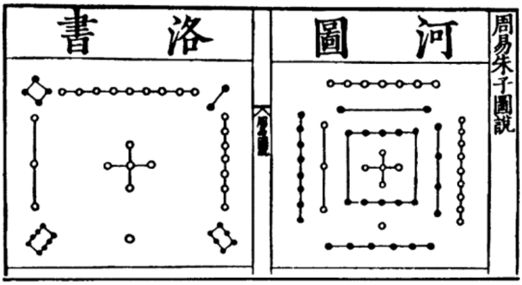
La ilustración siguiente es el Lo Shu, el cuadrado mágico tal como era conocido por los antiguos chinos.

Este patrón tiene otras hermosas propiedades. El número 5, a mitad de camino entre el 1 y el 9, ocupa naturalmente la celda central.

Las cuatro líneas a través del 5 central están en progresión aritmética, con diferencias 1, 2, 3, 4 girando en sentido antihorario de 6-5-4 a 9-5-1.

Las sumas de los cuadrados de la primera y tercera columna son iguales: $4^2 + 3^2 + 8^2 = 2^2 + 7^2 + 6^2 = 89$. La columna central da $9^2 + 5^2 + 1^2 = 107 = 89 + 18$.

Los cuadrados de los números de las filas suman 101, 83 y 101, y $101 - 83 = 18$.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Hay sólo 8 maneras en las que el total mágico de 15 se puede hacer sumando 3 de los números enteros del 1 al 9. Cada una de estas 8 maneras ocurre una vez en el cuadrado.

9,869 604... = π^2

Legendre demostró en 1794 que π^2 es irracional.

10

La base de nuestro sistema de conteo, por lo tanto, tiene la prueba más simple de divisibilidad. El número de ceros consecutivos, contando desde el lugar de las unidades, es igual a la potencia de 10 por la que se puede dividir el número. El segundo número en ser la suma de dos cuadrados diferentes: $10 = 1^2 + 3^2$.

10 no es, sin embargo, la diferencia de 2 cuadrados, porque es de la forma $4n + 2$. La secuencia de números que no son la diferencia de 2 cuadrados es 2 6 10 14 18...

El 4to número triangular: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Hay 10 pinos en un arreglo triangular en una bolera.

Es el único número triangular que es la suma de cuadrados impares consecutivos.

El 3er número tetraédrico: 10 = 1 + 3 + 6, donde 1, 3 y 6 son los números triangulares.

Entre cada 10 enteros consecutivos hay por lo menos uno que es relativamente primo a todos los demás. [B. G. Eke]

10! = 6!7! La única solución conocida a $n = a!b!$ aparte del patrón general, $(n!)! = n!(n! - 1)!$.

La base de los logaritmos de Briggs.

Euler conjeturó en 1782 que no existen dos cuadrados Latinos mutuamente ortogonales de orden $4n + 2$.

Esto es cierto para el orden 6, pero falso para los órdenes 10, 14, ... como Bose, Shrikhande y Parker demostraron en 1959.

La noticia del fracaso de Euler, a diferencia de la mayoría de los descubrimientos matemáticos, apareció en los titulares de los periódicos, y Bose, Shrikhande y Parker fueron apodados ‘los saboteadores de Euler’.

En la figura, cada dígito en **negrita** aparece una vez en cada fila y columna, al igual que cada dígito en *cursiva*. Además, cada par de dígitos de 00 a 99 aparece una sola vez en la figura.

46	57	68	70	81	02	13	24	35	99
71	94	37	65	12	40	29	06	88	53
93	26	54	01	35	19	85	77	60	42
15	43	80	27	09	74	66	58	92	31
32	78	16	89	63	55	47	91	04	20
67	05	79	52	44	36	90	83	21	18
84	69	41	33	25	98	72	10	56	07

59	30	22	14	97	61	08	45	73	86
28	11	63	96	50	87	34	62	49	75
00	82	95	48	76	23	51	39	17	64

El teorema de Desargues define una configuración de 10 líneas, con 3 puntos en cada línea y 3 líneas pasando por cada punto.

Tome un número y multiplique sus dígitos. Repita con la respuesta y repita de nuevo hasta que se alcance un solo dígito. El número de pasos requeridos se llama persistencia multiplicativa del número.

10 es el número más pequeño con persistencia multiplicativa de 1. Los números más pequeños con persistencia multiplicativa de 2 a 8 son:

(1)	2	3	4	5	6	7	8
(10)	25	39	77	679	6788	68889	267889

El número más pequeño con una persistencia multiplicativa de 11 es 277777788888899. Ningún número menor de 10^{50} tiene una mayor persistencia multiplicativa y se conjetura que hay un límite superior a la persistencia multiplicativa de cualquier número.

N. J. A. Sloane, ‘Multiplicative Persistence’, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 6.

El sistema decimal

El filósofo griego Aristóteles y el poeta romano Ovidio coincidieron en que contamos en diez porque tenemos diez dedos. Es tan razonable como concluir que algunas culturas cuentan en 5s basándose en las manos individuales, y que contar en 20s se basa en el uso de las manos y los pies.

Contar un pequeño número de objetos no es difícil. De hecho, es suficiente tener una secuencia estándar de nombres para ellos, como uno, dos, tres, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

La dificultad surge cuando se desea contar muchos objetos. El conjunto necesariamente limitado de nombres básicos debe repetirse de alguna manera en diferentes combinaciones. Cuanto más claro y sencillo sea el sistema de repeticiones, más fácil será contar y, de forma igualmente significativa, calcular.

Los antiguos egipcios registraban números agrupando símbolos de potencias de 10. Esto es tan engorroso como el sistema romano, que todavía se utiliza ocasionalmente en las inscripciones públicas.

Nuestro moderno sistema de conteo en 10 y las variantes que se utilizan en los ordenadores, como las bases 2, 8 y 16 y las alternativas que a veces se proponen, como el sistema duodecimal o la base 12, se basan en dos principios, el uso del cero y el principio de lugar y valor.

Cuando el valor de un número depende sólo de la parte del número en que aparece, se puede utilizar un conjunto limitado de números, sólo 0 y 1 en binario, para contar de manera muy simple y regular, tan grande como queramos, y para calcular mediante algoritmos simples y poderosos, conocidos por los alumnos como 'sumas', aunque ellos hacen mucho más que simplemente sumar números juntos.

Pierre Simon de Laplace comentó que esta misma simplicidad 'es la razón por la que no somos suficientemente conscientes de cuánta admiración merece'.

El sistema romano usaba las letras I, V, X, L, C, D, M para representar 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Estos números suben en saltos, aumentando alternativamente cinco veces y duplicándose.

El valor de un dígito en nuestro sistema simplemente aumenta diez veces con cada paso a la izquierda: 1 - 10 - 100 - 1000 - 10000, y así sucesivamente.

Desafortunadamente, 10 no es la base ideal para un sistema en el que los comerciantes y vendedores tienen que medir pequeñas cantidades, fracciones de un todo, porque sólo las mitades y quintas partes pueden ser representadas por números enteros. Incluso una simple fracción como un cuarto tiene que estar representada por una fracción de 10.

En consecuencia, aunque se utiliza un sistema numérico basado en 10, en toda Europa se ha utilizado una extraordinaria variedad de sistemas de pesos y medidas en tiempos históricos basados en mezclas de unidades. Todos estuvieron de acuerdo en usar el 8º, 12º, 20º, 60º, 24º, cualquier cosa menos el incómodo 10º.

No fue sino hasta 1791, cuando la Academia de Ciencias de París recomendó un nuevo sistema métrico, cuando comenzó a emerger cualquier sistema generalmente aceptable y uniforme. 1 metro se definió como 1/40.000.000 de parte de una circunferencia de la tierra a través de los polos. Las relaciones entre las unidades debían ser siempre de 10 potencias. Los prefijos griegos y latinos se utilizaron para unidades más grandes y más pequeñas, respectivamente, como en esta tabla:

prefijo	*cantidad*
kilo	× 1.000
hecto	× 100
deca	× 10
deci	× 0,1
centi	× 0,01
mili	× 0,001

Hoy en día, otros dos prefijos son especialmente comunes: ‘mega’ que significa × 1.000.000 y ‘micro’ que significa × 0,000 001.

El metro como unidad de longitud se utilizó para definir las unidades de volumen y masa, y hoy en día todas las mediciones científicas se basan en el sistema métrico.

Para los matemáticos, por otro lado, las cosas no planteaban ningún problema. Todo lo que querían era un sistema para representar cantidades indefinidamente pequeñas que fuera tan fácil de usar como la base habitual de 10 para números enteros.

Adam Riese dio un gran paso adelante en 1522 cuando publicó una tabla de raíces cuadradas, explicando que los números se habían multiplicado por 1.000.000 y que las raíces eran .1000 veces más grandes.

Francisco Viete, en 1579, publicó un libro en el que usaba fracciones decimales como una cuestión de rutina, y recomendó su uso a otros, y Simón Stevin en 1585 publicó un folleto de 7 páginas en el que explicaba las fracciones decimales y su uso. Stevin también tuvo la previsión de recomendar que se utilizara un sistema decimal para las pesas y medidas y para la acuñación de monedas y para la medición de ángulos.

Hay una posdata para la historia de las fracciones decimales. La notación de los decimales todavía varía entre el inglés, que coloca el punto decimal en el nivel medio, los americanos que lo colocan en la línea, y la Europa continental donde se utiliza una coma.

Los pitagóricos

Pitágoras y sus discípulos enseñaron que todo es número. Para ellos, los números significaban estrictamente números, enteros. Las fracciones se consideraron sólo como proporciones entre enteros.

Los griegos distinguían entre *logistike* (de ahí nuestro término logística), que significaba numeración y computación, y aritmética, que era la teoría de los números en sí misma.

Era la aritmética lo que Platón, un convencido pitagórico, insistía en que cada ciudadano de su República ideal debía aprender, como una forma de instrucción moral. Fue un profundo choque para su filosofía cuando se descubrió que $\sqrt{2}$ no era la proporción de dos enteros, aunque sin duda era una longitud y por lo tanto, a los griegos que pensaban en los números geométricamente, un número o proporción de números.

Pitágoras mismo o sus discípulos descubrieron que la armonía en la música correspondía a simples proporciones en números. De hecho, fue este descubrimiento el que proporcionó el apoyo más temprano para su doctrina. Aristóteles registra que, 'Se supone que los elementos del número son los elementos de todas las cosas, y que el cielo entero es una escala musical y un número'.

La octava corresponde a la relación 2:1 porque si la longitud de una cuerda musical se reduce a la mitad, suena una octava más alta. La relación 3:2 corresponde a la quinta y 4:3 a la cuarta.

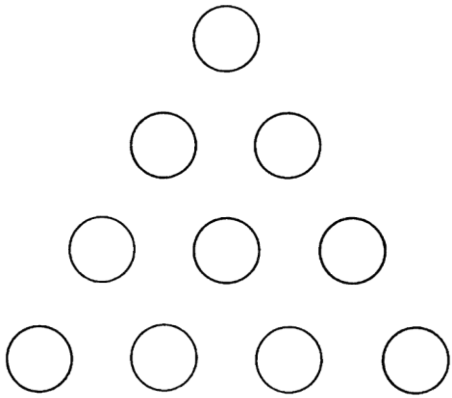
Los intervalos algo menos armoniosos fueron representados por números más grandes. Un solo tono era la diferencia entre un quinto y un cuarto, y por lo tanto era 9:8, que es 3:2 dividido por 4:3.

(El problema de construir una escala completa es muy complejo, y ha comprometido los esfuerzos de los músicos hasta el día de hoy. Todas las soluciones implican una aproximación. No es posible, por ejemplo, que una escala fija, como la que posee un piano, incluya todas las quintas y cuartas perfectas que el intérprete desee. El violinista tiene una ventaja sobre el pianista. La solución que divide la octava en 12 tonos iguales no consigue que ninguno de ellos sea perfectamente correcto.)

Las relaciones básicas se podían representar en la secuencia 12:9:8:6 y la suma de estos números, 35, se llamaba armonía.

Más comúnmente, los pitagóricos pensaban que estas proporciones involucraban sólo 1, 2, 3 y 4, cuya suma es 10, que es la base de nuestro sistema de conteo. ¡Qué elegantemente todo encaja! No es de extrañar que se sintieran confirmados en su diagnóstico del significado vital del Número.

El número 10 también puede ser representado como un triángulo, al que llamaron los *tetraktys*. Para los pitagóricos era sagrada, tan santa que incluso juraron por ella.



Más tarde, los pitagóricos describieron muchos otros tetraktys. La magnitud, por ejemplo, comprendía el punto, la línea, la superficie y el sólido.

Los aspectos primitivos de la creencia pitagórica se extinguieron muy lentamente. Sus descubrimientos musicales no desaparecieron en absoluto. Era ciencia verdadera, dos mil años antes de que la ciencia moderna mostrara los números enteros en la Tabla Periódica del químico o en el modelo del átomo del físico.

Precisamente porque la música fue durante tanto tiempo un ejemplo único de números genuinos en la ciencia, tuvo un efecto abrumador. Leibniz escribió: ‘La música es un ejercicio aritmético secreto y la persona que se da el gusto no se da cuenta de que está manipulando los números’.

Eso no es del todo correcto. Los primeros compositores clásicos, antes del romanticismo, eran a menudo bastante deliberados en el uso de patrones matemáticos para estructurar su música.

A diferencia de los griegos, no nos limitamos a los números enteros, y hoy en día la ciencia a menudo parece estar empapada en aproximaciones racionales, resultados racionales de la observación experimental.

Sin embargo, bajo la complejidad de la ciencia moderna, los números enteros pueden seguir ocupando un papel central. Daniel Shanks da muchos ejemplos de su participación en la ciencia moderna. Para relatar sólo uno de sus ejemplos, ¿por qué la fuerza de gravedad al doble de la distancia se reduce por un factor de 4? ¿Por qué el factor es aparentemente 4 exactamente, en lugar de 4 aproximadamente? Probablemente porque vivimos en un espacio de exactamente 3 dimensiones.

La fe de los pitagóricos en los números enteros puede ser reivindicada aún.

Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number Theory*, vol. 1, Spartan Books, 1962.

11

El 5to primo.

El más pequeño repunit, un número cuyos dígitos son todos unidades.[12]

11, como todos los repunits, es divisible por el producto de sus dígitos.

Debido a que 11 = 10 + 1, hay una simple prueba de divisibilidad por 11. Sumar y restar los dígitos alternativamente, desde un extremo. (Cualquiera de los dos extremos puede ser elegido como punto de partida.)

Si la respuesta es divisible por 11, también lo es el número.

Esto equivale a sumar los dígitos en las posiciones impares, y aparte las posiciones pares, y restar una respuesta de la otra.

11 aparece como un factor y un múltiplo, aunque no por sí mismo, en el sistema imperial de medición de la longitud. 5,5 yardas era una vara

[12] También llamado *repituno*.

(*rod*), palo (*pole*) o percha (*perch*); 22 yardas es una cadena (*chain*); 220 yardas un estadio (*furlong*); y 1760 = 11 × 160 yardas hacen 1 milla.

11 es el único primo palíndromo con un número par de dígitos.

Dados 4 enteros consecutivos mayores que 11, hay al menos uno de ellos que es divisible por un primo mayor que 11.

El mundo en el que vivimos es aparentemente de tres dimensiones, o de cuatro dimensiones cuando el tiempo se cuenta como una dimensión extra. Según la última teoría física de la supersimetría, el espacio se describe más fácilmente como 11-dimensional.

Siete de las dimensiones son 'curvadas sobre sí mismas'. Sus efectos físicos serían directamente observables sólo en una escala aún inaccesible, miles de millones de veces menor incluso que la de las partículas subatómicas.

Otra idea extraña pero espectacular relacionada con la supersimetría es que las unidades básicas de materia y fuerza son fenómenos llamados cuerdas, y que las diversas partículas fundamentales corresponden a las diferentes formas en que estas cuerdas vibran, como los armónicos de su violín.

Bryan Silcock, 'The Cosmic Gut', *The Sunday Times*, 24 de marzo de 1985.

Los números de Lucas

11 es el quinto número de la secuencia de Lucas: 1 3 4 7 11 18 29 47 76 123 199 322...

Esta secuencia está estrechamente relacionada con la secuencia de Fibonacci. Cada término es la suma de los dos anteriores, y la relación de términos sucesivos tiende al Razón Áurea como límite. Es una curiosidad que la secuencia de Lucas también tenga un convergente fácil de recordar: φ, 322/199.

Hay una fórmula para el término *n*-ésimo que es muy similar a la fórmula de Binet para el número *n*-ésimo Fibonacci:

$$\mathrm{L}_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}{2^n} + \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n}$$

o $\mathrm{L}_n = a^n + b^n$ donde a y b son las raíces de $x^2 = x + 1$.

Esta fórmula comparte una propiedad útil con la de Binet. El segundo término disminuye tan rápidamente que los números de Lucas pueden ser calculados encontrando el entero más cercano a las potencias de φ, de este modo, $\varphi^5 = 11{,}09017$ y $L_5 = 11$.

Lucas descubrió muchas propiedades de la secuencia de Fibonacci, y estudió las secuencias generales de Fibonacci, en las que cada término es la suma de los dos términos anteriores, pero los términos iniciales no son necesariamente 1 y 1, o 1 y 3.

Utilizó las secuencias de Fibonacci y Lucas para construir pruebas de la primalidad de los números de Mersenne.

Los números de Lucas pueden expresarse como sumas de números de Fibonacci:

Es siempre verdad que F_n divide a F_{mn}. Para valores pequeños de n, la proporción es conocida y puede expresarse en términos de números de Lucas, por ejemplo:

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{3n} = F_n(L_{2n} + (-1)^n)$$

Cuadrar los números de Fibonacci, luego restar y sumar 4 alternativamente, produce los cuadrados de los números de Lucas:

$$5 \times 1^2 - 4 = 1^2 \qquad 5 \times 1^2 + 4 = 3^2$$

$$5 \times 2^2 - 4 = 4^2 \qquad 5 \times 1^2 + 4 = 7^2$$

y así sucesivamente.

Naturalmente hay muchas fórmulas que conectan sólo los números de Lucas, por ejemplo, $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$.

12

Hay 12 meses en el año, divididos aproximadamente en 4 estaciones, 12 signos del Zodíaco, divididos en 3 grupos de 4 cada uno, y 12 horas, que se repiten día y noche.

Hay 12 pentominós diferentes, si las piezas se pueden voltear. De lo contrario, hay 18.

12 es divisible por la suma de sus dígitos y por su producto.

El producto de los divisores propios de 12 es $12^2 = 144$.

$12^2 = 144$ y, invirtiendo todos los dígitos, $21^2 = 441$.

El mismo patrón se ajusta a $13^2 = 169$ y $31^2 = 961$ y a otros cuadrados de números con suficientes dígitos pequeños.

Hay 12 tonos en la moderna escala musical de 12 tonos.

12 esferas idénticas pueden tocar una a otra, cada una de las esferas exteriores tocando la esfera central y otras 4.

Los números de esferas que pueden tocar una esfera en dimensiones superiores hasta la dimensión 10 son:

dim. 4	dim. 5	dim. 6	dim. 7	dim. 8	dim. 9	dim. 10
24	40	72	126	240	272	306

El poliedro dual, el cubo y el octaedro, cada uno tiene 12 bordes.

Números abundantes

12 es el primer número abundante, lo que significa que es menor que la suma de sus factores excluyéndose a sí mismo: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

Sólo hay 21 números abundantes no mayores de 100, comenzando por 12, 18, 20, 24, 30, 36...

Todos son pares. Los números abundantes son esencialmente números con suficientes factores primos diferentes. La mayoría de los números tienen muy pocos factores y son deficientes, es decir, son mayores que la suma de sus factores. Todos los primos y sus potencias son deficientes.

Las potencias primas menos deficientes, por así decirlo, son las potencias de 2. Los divisores de 2^n excluyéndose suman $2^n - 1$, sólo 1 menos que el número original. Por esta razón, estos números a veces se llaman casi perfectos.

Separando los números abundantes de los deficientes están los muy raros números perfectos, exactamente iguales a la suma de sus divisores.

Todos los múltiplos de un número perfecto o abundante son también abundantes. Cualquier divisor de un número perfecto o deficiente es también deficiente.

$\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de n, incluyendo n; $\sigma(12)/12 = 12 + 16/12 = 28/12$ o $7/3$, que es, por supuesto, un récord para números de hasta 12.

Cualquier número que establezca un registro para $\sigma(n)/n$ se llama superabundante. Se sabe que hay infinidad de números sobreabundantes.

El sistema duodecimal

Aunque damos por sentado que se cuenta en decenas, hay desventajas en el uso de 10 como base o como proporción entre las medidas estándar. Es especialmente molesto que una simple fracción como un tercio no pueda ser representada exactamente, sino sólo como una fracción decimal repetida.

El sistema duodecimal, basado en el 12, permite que las terceras, cuartos y sextos se expresen de forma muy sencilla. Los 12 meses del año se dividen naturalmente en 4 estaciones de 3 meses cada una, los 12 signos del Zodíaco se dividen en 4 grupos de signos asociados con el fuego, el aire, la tierra y el agua respectivamente. En muchos calendarios los 12 meses se dividen en 6 meses cortos y 6 meses largos.

También es tan fácil probar la divisibilidad de un número por 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 en la base 12... como lo es probar la divisibilidad en la base 10 por 2, 5, 10, 20...

Estas eran ventajas importantes cuando el cálculo en sí mismo era un arte sutil y difícil de aprender, tan importante que en toda Europa el sistema 10, basado en nuestros diez dedos, se mezcló con sistemas de unidades basados en proporciones de 2, 4, y especialmente 12, o combinaciones de 10 y 12.

Platón, describiendo su estado ideal, estableció sus monedas y pesos y medidas, los distritos electorales y la representación en la asamblea, e incluso las multas a imponer por delitos, en un sistema duodecimal.

Los romanos usaban sólo fracciones duodecimales. Cuando Plinio el Viejo estimó el área de Europa para todo el mundo, declaró que era ‘algo más que la tercera y la octava parte de toda la tierra’ usando fracciones romanas a la manera egipcia, en lugar de decir once veinticuatro-avas partes’. [Menninger]

Llamaron *uncia* a una duodécima parte, de donde proviene nuestra palabra onza. Cuando una uncia no era lo suficientemente pequeña, se dividía en 24 escrúpulos (*scruples*), que podían ser subdivididos de nuevo. La medida más pequeña, 1 *calcus* = 1/8 *scruple* = 1/192 *uncia* = 1/2304 de la unidad.

En otros lugares se ha utilizado el sistema sexagesimal, basado en 60, especialmente para el cálculo científico. Porque 60 = 5 × 12 tiene las ventajas de 10 y 12 combinados.

Todavía contamos 12 pulgadas para el pie, así como el uso del sistema métrico. Todo el mundo estaba familiarizado con los 12 peniques en un chelín antes de la decimalización en 1971. Esto se originó en el estándar monetario de Carlomagno: 1 libra = 20 solidi = 240 denarios, de ahí nuestro signo '£' y la 'd' de peniques.

Seguimos hablando de una docena o docenas, aunque está llegando a significar 'un número bastante grande' en lugar de cualquier cifra exacta, y la docena o docena bruta es casi obsoleta.

En Inglaterra solía haber un largo centenar de 120 unidades y un corto centenar de 100 unidades. A menudo era necesario indicar si `cien' era por el recuento de 12 o por el de 10. El gran centenar de 120 unidades se sigue utilizando en Alemania y Escandinavia.

Buffon propuso que se adoptara universalmente un sistema duodecimal para el recuento y para todas las medidas y monedas. También Isaac Pitman, el inventor de la taquigrafía de Pitman, Herbert Spencer, el filósofo, H. G. Wells y Bernard Shaw, y muchos otros.

En 1944, la Duodecimal Society se estableció como una organización voluntaria sin fines de lucro en el estado de Nueva York. Sus objetivos eran 'investigar y educar al público en ciencias matemáticas, con especial relación al uso de la Base Doce en numeración, matemáticas, pesas y medidas, y otras ramas de la ciencia pura y aplicada'.

La Sociedad Duodecimal propuso añadir la letra X para representar al 10 y la letra E para representar al 11, y afirmó que el conteo por docenas puede ser aprendido por cualquiera en aproximadamente media hora.

Pronto argumentaron que los términos 'decimal' y 'punto decimal' eran 'definitivamente impropios' cuando se referían a bases distintas de 10, así como a fracciones decimales.

A pesar de su entusiasmo, no hay ninguna posibilidad de que el cambio a duodecimal se haga nunca. De hecho, en el último siglo, más o menos, el cambio ha ido en sentido contrario, desde que se introdujo el sistema métrico.

Hoy en día, los ordenadores hacen muchos más cálculos, los ingenieros trabajan con tolerancias mucho más finas de lo que el artesano tradicional jamás imaginó; las fracciones todavía ofrecen dificultades a muchas personas, pero son mucho más comprendidas que en el pasado y, por último, pero no por ello menos importante, el coste sería insoportable.

El dodecaedro

El número de caras de un dodecaedro, el cuarto de los sólidos platónicos, es 12. También tiene 20 vértices y 30 bordes, y es el dual del icosaedro. Si los puntos medios de las caras vecinas de un dodecaedro regular están unidos, por ejemplo, forman un icosaedro regular.

El icosaedro regular puede ser visto como un antiprisma con extremos pentagonales, más 2 pirámides pentagonales. No es de extrañar que la presencia de pentágonos regulares signifique también la presencia de la Sección Áurea. En particular, si se unen los bordes opuestos del antiprisma, se obtienen 3 rectángulos, cuyos lados están en la Relación Áurea, en ángulos rectos entre sí.

Es un hecho extraordinario, que a primera vista parece absurdo, que si un dodecaedro y un icosaedro están inscritos en esferas idénticas, el dodecaedro ocupa un volumen mayor, aunque el icosaedro tiene más caras y, por lo tanto, parecería naturalmente que ‘encaja mejor’. De hecho, el dodecaedro ocupa aproximadamente el 66,5% de la esfera, el icosaedro sólo el 60,56%.

El dodecaedro rómbico, descrito por primera vez por Kepler, también tiene 12 caras. Imagine cubos empaquetados juntos para llenar el espacio. Los 6 cubos adyacentes a cualquier cubo pueden ser cortados en 6 pirámides uniendo sus centros a los vértices. Si estas pirámides se pegan a sus cubos opuestos, cada cubo se convierte en un dodecaedro rómbico, y los dodecaedros rómbicos empaquetan el espacio completamente, tal como lo hicieron los cubos, con la diferencia de que cada dodecaedro rómbico tiene el doble del volumen del cubo correspondiente.

13

Un número notoriamente desafortunado. Esta superstición ha sido ligada a los 13 que se sentaron a la mesa en la Última Cena, pero probablemente se originó sólo en el período medieval. Hay una palabra para el miedo al número 13, como el miedo a vivir en el piso 13 de un bloque de apartamentos: triskaidekafobia, del griego ‘miedo al trece’.

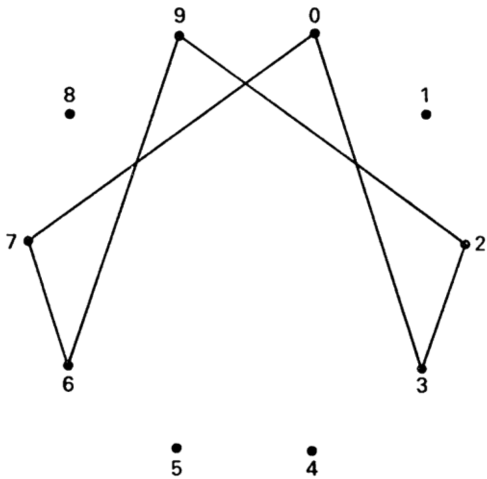
Hay 13 veces 4 semanas en un año, y 13 cartas en cada palo de un paquete estándar.

Irónicamente, el 13 es el 5º número afortunado, y también el 6º primo y el 7º número de Fibonacci.

13 es el segundo primo más pequeño, *p*, el período de cuyo recíproco es 0,5(p – 1)

1/13 = 0,076923 076923... (1/3 es el más pequeño de estos primos).

Exactamente la mitad de los múltiplos de 1/13 de 1/13 a 12/13 tienen períodos que son una permutación cíclica de esta cadena. Los otros múltiplos tienen todos períodos que son permutaciones cíclicas de 153846.



La secuencia de dígitos forma un patrón que es más evidente cuando se ordena como en la figura.

12! + 1 es divisible por 13^2.

Los poliedros de Arquímedes

Hay 13 poliedros de Arquímedes, llamados así por Arquímedes que escribió un libro sobre ellos, ahora perdido. Kepler fue el primer matemático moderno en describirlos.

Se describen como semiregulares, porque sus bordes y vértices son todos iguales, y sus caras son todos polígonos regulares, aunque no todos del mismo tipo.

Dos clases infinitas de poliedros son también semiregulares, los prismas regulares y los antiprismas regulares.

Kepler también descubrió los dodecaedros estrellados más pequeños y grandes, redescubiertos con otros dos poliedros que son regulares, pero no convexos por Poinsot.

También hay 13 poliedros arquimedianos dobles, cuyos vértices, pero no las caras mismas, son regulares, y un número de estelaciones[13] de los sólidos arquimedianos, correspondientes a las estelaciones Kepler-Poinsot de los sólidos platónicos.

También hay una serie de hermosos poliedros compuestos, que demuestran la simetría de los vértices del sólido inscrito.

¿Qué poliedros convexos son posibles si se descartan todas las condiciones de simetría, excepto la regularidad de las caras? Esto fue respondido sólo recientemente, en la década de 1960. Los poliedros convexos de cara regular son: los prismas y antiprismas regulares, los 5 sólidos platónicos, los 13 poliedros arquimedianos y 92 otros.

N. W. Johnson, 'Convex Polyhedra with Regular Faces', *Canadian Journal of Mathematics*, 18 (1966).

El teorema de Pitágoras y los triples pitagóricos

El teorema de Pitágoras, que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados en los lados más cortos es igual al cuadrado de la hipotenusa, ha sido familiar para generaciones de escolares. De hecho, es tan famoso que es incluso el remate de un chiste, '…lo que prueba que la indígena en

[13] La estelación, es un proceso para construir nuevos polígonos (en dos dimensiones), poliedros (en tres dimensiones), o en general politopos de *n* dimensiones. El proceso consiste en extender elementos, tales como bordes o planos, por lo general de forma simétrica, hasta que vuelvan a encontrarse. La nueva figura es una estelación de la anterior (*Wikipedia*).

el hipopótamo es igual a la suma de las indias de los otros dos escondidos'.[14]

Se han publicado más pruebas del teorema de Pitágoras que de cualquier otra proposición en matemáticas, varios cientos en total.

El triángulo 3-4-5 es el ejemplo más simple de un triángulo pitagórico, es decir, un triángulo rectángulo con lados integrales, pero es sólo uno de un conjunto infinito, que continúa con 5-12-13, de ahí la presente entrada, 6-8-10 que no es *primitivo* porque es sólo un múltiplo del triángulo 3-4-5, y luego 7-24-25.

Los babilonios alrededor del año 2000 a.C. estaban familiarizados con los triángulos pitagóricos, aunque no sabemos cómo los llamaban. La famosa tableta cuneiforme, Plimpton 322, enumera quince conjuntos de números que son los lados de los triángulos rectangulares.

El autor de esta tabla aparentemente sabía que los números $2pq$, $p^2 - q^2$ y $p^2 + q^2$ son los lados de un triángulo rectángulo. (También es cierto que los lados de cualquier triángulo en ángulo recto que no tienen ningún factor común son de esta forma.)

Es casi seguro que los griegos obtuvieron al menos la idea de más al este, y el propio Pitágoras o uno de sus discípulos descubrieron una prueba de la proposición geométrica.

El triángulo 3-4-5 tiene un número de propiedades no compartidas por otros triángulos pitagóricos (aparte quizás de múltiplos como 6-8-10).

Es el único triángulo pitagórico cuyos lados están en progresión aritmética. También es el único triángulo de cualquier forma con lados integrales, la suma de cuyos lados (12) es igual al doble de su área (6).

Curiosamente, hay al menos otro triángulo pitagórico cuya superficie se expresa con un solo dígito: el triángulo 693-1924-2045 tiene una superficie de 666.666. En promedio, un sexto de todos los triángulos pitagóricos tiene áreas terminadas en el dígito 6, en base 10; un sexto termina en 4 y los otros dos tercios terminan en 0. [W. P. Whitlock Jnr]

Hay un conjunto infinito de triángulos de tal manera que la hipotenusa y un cateto difieren en 1. Siguen este patrón:

---

[14] *'...which proves that the squaw on the hippopotamus is equal to the sum of the squaws on the other two hides.'*

$3^2 = 9 = 4 + 5$ $\qquad$ $3^2 + 4^2 = 5^2$

$5^2 = 25 = 12 + 13$ $\qquad$ $5^2 + 12^2 = 13^2$

$7^2 = 49 = 24 + 25$ $\qquad$ $7^2 + 24^2 = 25^2$…

También hay un número infinito de triángulos cuyos catetos difieren en uno, aunque no son tan fáciles de calcular.

Empezando por la fórmula de los lados: $2pq$, $p^2 - q^2$ y $p^2 + q^2$, donde p y q son dos enteros cualesquiera, si p y q generan un triángulo cuyos catetos difieren en 1, el siguiente triángulo es generado por q y $p + 2q$.

El triángulo 3-4-5 se genera a partir de la fórmula por 1 y 2, por lo que el siguiente triángulo casi-isósceles se generará por 2 y 5. Es 20-21-29.

Aplicando la regla $(p, q) \rightarrow (q, p + 2q)$ repetidamente, obtenemos esta secuencia: 1 2 5 12 29 70 169 408... Tomando dos cualesquiera miembros sucesivos de la secuencia de los generadores se produce un triángulo pitagórico casi isósceles. Por supuesto, el triángulo nunca puede ser realmente isósceles, porque $\sqrt{2}$ es irracional. La misma secuencia de números ocurre en las mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$ por fracciones.

La fórmula ya dada para los lados de un triángulo en ángulo recto implica que la longitud de la hipotenusa es también la suma de dos cuadrados.

Girard sabía y Fermat unos años más tarde demostró el bello teorema de que cada primo de la forma $4n + 1$; es decir, los primos 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53... es la suma de dos cuadrados exactamente de una manera. Los primos de la forma $4n + 3$, como 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47... nunca son la suma de dos cuadrados.

Leonardo de Pisa ya sabía que el producto de dos números que son cada uno la suma de dos cuadrados es también la suma de dos cuadrados.

De ello se deduce que el cuadrado de cualquiera de estos números, digamos 13^2, es la suma de dos cuadrados, y por lo tanto la hipotenusa de un triángulo rectángulo. La inversa, sin embargo, es más complicada; por lo tanto, $17^2 + 144^2 = 145^2$ y 145 no es primo, aunque es el producto de 5 y 29 de los cuales ambos son primos de la forma $4n + 1$.

Hay otras formas de obtener triples pitagóricos. Tome cualquier par de números impares o pares consecutivos, y sume sus recíprocos. Por ejemplo, $1/3 + 1/5 = 8/15$. Entonces 8 y 15 son los catetos de un triángulo en ángulo recto: de hecho, $8^2 + 15^2 = 17^2$. Este método equivale a hacer que uno de los generadores de la fórmula habitual sea igual a 1, por lo que sólo produce un subconjunto de todos los triángulos posibles.

Si dos de los lados de un triángulo en ángulo recto son tomados como generadores para un nuevo triángulo, entonces el triángulo resultante contendrá el cuadrado del tercer lado del triángulo original como uno de sus lados. [W. P. Whitlock Jnr.]

Por lo tanto, toma 3 y 4 del triángulo 3-4-5. El nuevo triángulo es 7-2425, que contiene 52 como uno de sus lados.

14

En el sistema imperial de pesos y medidas, el número de libras de peso en una piedra (*stone*).

También el número de días en una quincena.

14 es el tercer número piramidal cuadrado: 14 = 1 + 4 + 9.[15]

14 y 15 son el primer par de números sucesivos de tal manera que las sumas de sus factores, incluyendo los números mismos, son iguales: 1 + 2 + 7 + 14 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24.

14 es el número más pequeño, *n*, tal que no hay un número con exactamente *n* números menos que, y primo a, él. La secuencia de tales números continúa: 26 34 38 50...

Los triángulos equiláteros con lados integrales, que tienen áreas irracionales, pueden ser aproximados por triángulos Heronianos con lados y área integrales.

La primera aproximación es el triángulo pitagórico con los lados 3,4 y 5, y el área 6.

La segunda aproximación es 13, 14, 15 con el área 84, donde 14 se calcula como $4^2 – 2$.

La tercera aproximación es 193, 194, 195, donde $194 = 14^2 – 2$, y la cuarta es 37.633-4-5, y así sucesivamente.

---

[15] un número piramidal o número piramidal cuadrado es un número figurado que representa una pirámide con una base de cuatro lados.

15

El primer producto de 2 primos impares.

La suma de las filas, columnas y diagonales del cuadrado mágico más pequeño.

Números triangulares

15 es el quinto número triangular. Hay 15 bolas en un triángulo de snooker (billar).

Los griegos nombraron los números triangulares y los formaron sumando las series 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...

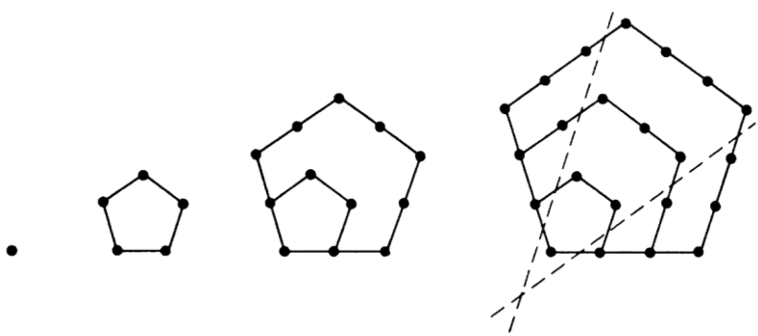
La fórmula general para el *n*-ésimo número triangular, denotado por T_n, es $\frac{1}{2}n(n + 1)$ y la secuencia comienza: 1 3 6 10 15 21 28...

(El valor total de los colores en el snooker es 27, uno menos que el séptimo número triangular, porque los valores de los colores sólo van de 2 a 7.)

$\frac{1}{2}n(n + 1)$ es también un coeficiente binomial, por lo que los números triangulares deben aparecer en el triángulo de Pascal. Lo hacen, como la tercera diagonal en cada dirección.

Los números triangulares son los más simples de los números poligonales. Hay muchas relaciones entre ellos. Cada número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos. Alternativamente, como Diofante sabía, cada cuadrado impar es 8 veces un número triangular, más 1.

Cada número pentagonal es la suma de tres números triangulares de una manera especialmente sencilla.



Para cada número triangular, T_n, hay un número infinito de otros números triangulares, T_m, de modo que T_nT_m es un cuadrado. Por ejemplo, $T_3 \times T_{24} = 30^2$.

Por otro lado, el cuadrado de cualquier número impar es la diferencia entre dos números triangulares relativamente primos.

Otra relación entre los números triangulares y los cuadrados:

$$T_n = n^2 - (n - 1)^2 + (n - 2)^2 - (n - 3)^2 + (n - 4)^2 - ... \pm 1$$

Hay una hermosa relación entre los números triangulares y los cubos: $T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n + l)^3$, de lo cual se deduce que la suma de los primeros n cubos es el cuadrado del n-ésimo número triangular, por ejemplo: $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$.

Esto apunta a una conexión con las sumas de las 5 potencias, porque siempre es cierto que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ divide $3 (1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5)$. M. N. Khatri señala que la suma de los números triangulares produce este curioso patrón:

$$T_1 + T_2 + T_3 = T_4$$
$$T_5 + T_6 + T_7 + T_8 = T_9 + T_{10}$$
$$T_{11} + T_{12} + T_{13} + T_{14} + T_{15} = T_{16} + T_{17} + T_{18}$$

y así sucesivamente, de lo cual deduce entre otros hechos que cada 4ta potencia es la suma de dos números triangulares. Por ejemplo, $7_4 = T_{41} + T_{55}$.

Dos relaciones entre los números triangulares solamente: $T_n^2 = T_n + T_{n-1}T_{n+1}$, y $2T_nT_{n-l} = T_{n^2-1}$.

La serie formada por la suma de los recíprocos de los números triangulares converge: 1 + 1/3+ 1/6+ 1/10 + 1/15+ 1/21 + 1/28 + ... = 2.

15 y 21 son el par más pequeño de números triangulares cuya suma y diferencia (6 y 36) también son triangulares. Los siguientes pares son 780 y 990, y 1747515 y 2185095. Resulta que el 6 es ‘el único número además de la unidad con menos de 660 dígitos cuyo cuadrado es un número triangular’. [Beiler]

Algunos números son simultáneamente triangulares y cuadrados. El primero es, por supuesto, 1. Los siguientes cuatro son 36, 1225, 41616 y

1413721. Las raíces de estos números, 1, 6, 35, 204, 1189... siguen un patrón simple ilustrado por 1189 = (204 × 6) – 35.

Estos se encuentran usando un hecho ya mencionado, que $8T_n + 1$ es siempre un cuadrado. Si el número triangular es en sí mismo un cuadrado, digamos x^2, entonces tenemos la ecuación de Pell: $8x^2 + 1 = y^2$.

La fórmula general es $1/32((17 + 12\sqrt{2})^n + (17 - 12\sqrt{2})^n - 2)$. También hay una regla para obtener una solución de otra: si T_n es un cuadrado perfecto, entonces también lo es $T_{4n(n+1)}$.

Por otro lado, ningún número triangular puede ser un cubo, o una cuarta o quinta potencia.

Charles Trigg da ejemplos de números triangulares palíndromos. Hay 40 números triangulares palíndromos por debajo de 10^7. Los más pequeños, además de 1, 3 y 6, son 55, 66, 171, 595, 666 y 3003. $T_{2662} = 3544453$, por lo que el número en sí y su índice, 2662, son palíndromos. T_{1111} y $T_{111.111}$ son 617716 y 6172882716 respectivamente.

16

El 4to cuadrado y la 2da cuarta potencia, después de 1.

El 1er cuadrado en ser la suma de dos números triangulares de dos maneras: 16 = 6 + 10 = 1 + 15.

Todos los números suficientemente grandes son la suma de un máximo de 16 cuartas potencias.

Euler mostró que la única solución para $a^b = b^a$ es $4^2 = 2^4 = 16$.

Los pitagóricos sabían que el 16 es el único número que es el perímetro y el área del mismo cuadrado.

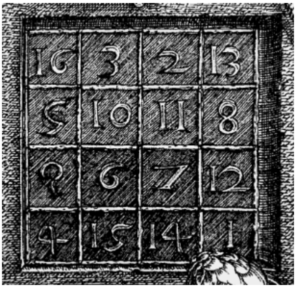
16, como 12, ha sido propuesto a menudo como base para un nuevo sistema de contar. J. W. Mystrom en el siglo XIX propuso que los números del 1 al 16 de este sistema se llamaran: *an, de, ti, go, su, by, ra, me, ni, ko, hu, vy, la, po, fy* y *ton*.

Con la llegada de los ordenadores electrónicos, se ha convertido en la base del sistema hexadecimal.

Cuadrados mágicos de orden-4

Los primeros 16 números se pueden arreglar de muchas maneras para hacer un cuadrado mágico de orden 4 en el que cada fila y columna y las dos diagonales tienen la misma suma, que siempre será 34.

La ilustración muestra el cuadrado mágico del grabado *Melancolía* de Durero. Los números en el centro de la fila inferior indican el año en que se hizo, 1514.



Muchos cuadrados mágicos, como el 3×3, tienen propiedades extras y elegantes. Este fue descrito por Alfred Moessner:

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

Las sumas de los cubos de los números a lo largo de cada diagonal son iguales, a $4624 = 68^2$.

Las sumas de las casillas de los números de la 1ra y la 4ta fila son iguales. La misma propiedad es compartida por las 2da y 3ra filas, y por las 1ra y 4ta columnas y las 2da y 3ra columnas.

Alfred Moessner, ‘A Curious Magic Square’, *Scripta Mathematica*, vol. 13.

El sistema hexadecimal

La base del sistema hexadecimal, utilizado en ordenadores. A los números habituales del 0 al 9 se añaden las seis letras A, B, C, D, E y F, que corresponden a los números del 10 al 15.

Los números se construyen entonces sobre los principios habituales. Por lo tanto, 6C5 significa 5 unidades, C = 12 dieciséis, y 6 dieciséis al cuadrado, o $5 + 12 \times 16 + 6 \times 256 = 1733$.

Debido a que 16 = 2^4 es excepcionalmente fácil convertir el hexadecimal en binario. Simplemente cambie cada número por su equivalente binario, añadiendo un cero inicial si es necesario para convertirlo en una cadena de cuatro dígitos. (Esto no es necesario para el primer dígito, solamente.)

En el mismo ejemplo, el primer dígito, 6, es 110 en binario. C = 12 es 1100, y 5 es 101 que se puede escribir 0101. Encadénalos en su orden original, y 6C5 = 1733 en base 10, y 11011000101 en binario.

Números casi perfectos

16 es casi perfecto, porque sus factores, excluyéndose a sí mismo, suman uno menos que él mismo: 1 + 2 + 4 + 8 = 15.

Todos los poderes de 2 son casi perfectos.

Si existe un número impar casi perfecto es, por supuesto, desconocido. Digo 'por supuesto' porque la existencia de casi cualquier tipo de perfección en un número impar es 'desconocida'.

Si los factores de un número, excluyendo el número mismo, suman uno más que el número, entonces el número se llama cuasi perfecto. Se sabe que un número cuasi perfecto debe ser el cuadrado de un número impar, que es impar, pero nadie sabe si existen números cuasi perfectos, que son impares. Ver 28 y números perfectos. [Guy] Si existe un cuasi-perfecto, es grande, mayor de 10^{35} y tiene al menos 7 factores primos distintos.

17

El 3er primo de Fermat: $17 = 2^{2^2} + 1$.

Gauss demostró a la edad de 18 años que un polígono regular puede ser construido con el uso de un borde recto y compás sólo si el número de lados es el producto de los distintos primos de Fermat, de la forma $2^{2^n} + 1$.

Por lo tanto, es posible construir un 17-gono regular con regla y compás solamente.

El período de 1/17 es de extensión máxima, 16:

1/17 = 0,0588235294117647.

17 es la primera suma de 2 cuartas potencias distintas: $17 = 1^4 + 2^4$.

17 es igual a la suma de los dígitos de su cubo, 4913. Los únicos otros números son 1, 8, 18, 26 y 27, de los cuales tres son cubos.

Elija los números *a, b, c*... en el intervalo (0,1) de modo que *a* y *b* estén en diferentes mitades del intervalo; *a, b* y *c* estén en diferentes tercios; *a, b, c* y *d* estén en diferentes cuartos y así sucesivamente.

No se pueden elegir más de 17 de estos números.

Hay 17 patrones de simetría esencialmente diferentes para un diseño de tapiz.

17 es el número más alto cuya raíz cuadrada fue probada irracional por Teodoro.

Según Plutarco, 'Los pitagóricos también tienen horror del número 17. Para 17 se encuentra a medio camino entre 16... y 18... estos dos números son los únicos que representan áreas para las cuales el perímetro (del rectángulo) es igual al área.'[16]

$n^2 + n + 17$ es una de las expresiones polinómicas más conocidas para los primos. Sus valores para n = 0 a 15 son todos primos, comenzando con 17 y terminando con 257.

Los únicos valores primos conocidos para los que $p^q - 1$ y $q^p - 1$ tienen un factor común inferior a 400.000 son 17 y 3313. El factor común es 112643.[17]

18

18 = 9 + 9 y su inversión, 81 = 9 × 9.

Este patrón funciona en cualquier base. Por ejemplo, en base 8: 7 + 7 = 16 y 7 × 7 = 61.[18]

El cubo y la 4ta potencia de 18 usan todos los dígitos del 0 al 9 una vez cada uno: $18^3 = 5832$ y $18^4 = 104976$.

18 es igual a la suma de los dígitos de su cubo: $18^3 = 5832$.

[16] Van de Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, Nueva York, 1971.

[17] N. M. Stephens, 'On the Feit-Thompson Conjecture', Mathematics of Computation, vol. 25.

[18] D. Y. Hsu, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 10.

19

El 3er número cuyo recíproco decimal es de máxima longitud, en este caso 18: 1/19 = 0,052631 578947 368421.

Hay una simple prueba de divisibilidad por 19: $100a + b$ es divisible por 19 si y sólo si $a + 4b$ lo es.

19 es el 3er número hexagonal centrado: 19 = 1 + 6 + 12.

Sólo hay una manera en la que los números enteros consecutivos pueden encajar en un arreglo hexagonal mágico, es decir, de manera que sus sumas en las tres direcciones sean todas iguales. Los números del 1 al 19 pueden arreglarse de esta manera, un hecho descubierto por primera vez por T. Vickers.

19! – 18! + 17! – 16! + ... + 1 es primo. Los únicos otros números con esta propiedad son 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 y 15. [Guy]

Todos los números enteros son la suma de un máximo de 19 cuartas potencias.

20

La suma de los primeros 4 números triangulares, y por lo tanto el 4to número tetraédrico: 20 = 1 + 3 + 6 + 10.

Un icosaedro tiene 20 caras y su dual, el dodecaedro, tiene 20 vértices.

20 es el segundo número semiperfecto, o pseudoperfecto, porque es la suma de algunos de sus propios factores: 20 = 10 + 5 + 4 + 1.

El más pequeño semiperfecto es el 12, que es también el primer número abundante. Los siguientes son 20, 24 y 30.

El sistema vigesimal

20 tiene un significado especial en muchos sistemas de conteo y de pesas y medidas.

La base 20, llamada vigesimal, fue utilizada por los astrónomos y fabricantes de calendarios mayas cuya cultura floreció desde el siglo IV d.C. Su sistema era posicional e incluía un cero, siglos antes de la aparición de los números indios en Europa.

20 se encuentra en la antigua moneda inglesa en ‘20 chelines en la libra’ y en el sistema imperial de pesos y medidas.

20 es una veintena, y las edades en el lenguaje bíblico se expresan a menudo en veintenas: ‘Los días de nuestros años son tres veintenas y diez; y si por razón de la fuerza son cuatro veintenas de años, sin embargo, es su fuerza el trabajo y la tristeza’.

Una ‘veintena’ o ‘veintenas’ sobreviven como expresión de un número relativamente grande.

21

El 6to número triangular, y por lo tanto el número total de puntos en un dado normal.

Si un cuadrado termina en el patrón *xyxyxyxyxy*, entonces *xy* es 21, 61 o 84.

El ejemplo más pequeño es: $508853989^2 = 258932382121212121$.[19]

21 es el número más pequeño de cuadrados distintos en los que se puede diseccionar un cuadrado.

El lado del cuadrado dividido es 112.[20]

22

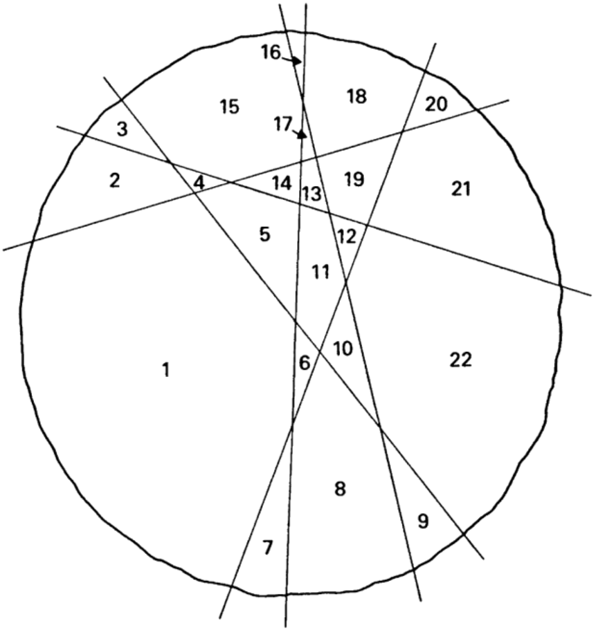
Para $n = 22$, 23 y 24 solamente, el número de dígitos en $n!$ es igual a n.

El número máximo de piezas en las que se puede cortar una torta con 6 tajadas (ver gráfico).

---

[19] J. A. H Hunter, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 6

[20] A. J W Duijvestijn, *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 25, 1978, pp 240 43.



La secuencia, comenzando con 1 rebanada, después: 2 4 7 11 16 22 29 37...

22 es un palíndromo, cuyo cuadrado es palíndromo: $22^2 = 484$.

Muchos palíndromos con dígitos suficientemente pequeños tienen esta propiedad, por ejemplo, 11, 111, 1111, 121, 212 y así sucesivamente.

Números pentagonales

22 es el 4to número pentagonal.

Los números pentagonales forman la serie: 1 5 12 22 35 51 70...

La fórmula para el n-ésimo número pentagonal es $\frac{1}{2}n(3n - 1)$.

Pueden formarse a la manera pitagórica como patrones de puntos, formando sucesivamente pentágonos más grandes (*ver **15***).

La fórmula, por supuesto, produce valores cuando n es un número entero negativo, de manera que los diagramas no lo hacen, por lo que la secuencia abierta en ambas direcciones dice: ... 40 26 15 7 2 0 1 5 12 22 35 60...

Si estos números están dispuestos en orden ascendente, se puede observar un patrón diferente en sus diferencias:

1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	70	77	92	100
1	3	2	5	3	7	4	9	5	11	6	13	7	15	8	

Las diferencias alternas forman los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... y los números impares, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Un teorema muy bello e importante fue descubierto por Euler, que involucra la secuencia completa de una manera sorprendente. Comenzó a multiplicar el producto infinito:

$$(1 - x)(1 - x^2)(\backslash - x^3)(1 - x^4)...$$

y descubrió que los primeros términos eran:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ...$$

Al principio se sintió incapaz de probar, excepto por esta inducción informal, que los índices de las potencias de x eran en realidad los números pentagonales, aunque el patrón era tan fuerte que era completamente convincente, y estaba satisfecho de desarrollar a partir de él otro teorema.

Euler demostró que si $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n, entonces $\sigma(n) = \sigma(n - 1) + \sigma(n - 2) - \sigma(n - 5) - \sigma(n - 7) + \sigma(n - 12) + \sigma(n - 15) - \sigma(n - 22) -...$

La suma continúa mientras los términos representen la suma de los factores de los números positivos. Si $\sigma(0)$ aparece como el último término, entonces debe ser reemplazado por n.

Por ejemplo, $\sigma(12) = \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + \sigma(0) = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$.

Esta relación puede ser usada para calcular los valores de $\sigma(n)$ si conoce los valores previos apropiados, lo cual es curioso, porque para encontrar la suma de los divisores de un número aparentemente se necesita conocer sus factores y por lo tanto si es o no es primo, ¡pero ninguna de esta información es necesaria para usar la fórmula!

A Euler también le interesaban las particiones de un número, es decir, las formas en que puede ser representado como la suma de otros enteros positivos. 5 puede dividirse en 7 partes: 5 es 5, o 4 + 1, o 3 + 2, o 3 + 1 + 1 o 2 + 2 + 1 o 2 + 1 o 2 + 1 + 1 + 1 o 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

El número de particiones de n se indica con $p(n)$. Resulta que:

$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + \ldots$

Esta secuencia también continúa mientras las particiones de números positivos estén involucradas. Este tiempo $p(0)$ cuenta como 1.

22,459 157 718 361 045 473 427 152... = π^e

No se sabe si este número es racional o irracional.

23

23 y 29 son el primer par de primos consecutivos que difieren en 6.

23 es uno de los dos únicos números enteros que realmente necesita 9 cubos para representarlo. El otro es el 239.

$23 = 2^3 + 2^3 + (7 \times 1^3)$

Se requiere, por supuesto, que los cubos sean positivos. Si se permiten cubos negativos, entonces, por ejemplo, 23 es igual a $3^3 + 4(-1)^3$, un total de sólo 7 cubos.

En general, si se permiten cubos negativos, entonces se sabe definitivamente que todos los enteros que no dejan un resto de 4 o 5 en división por 9 pueden ser representados como la suma de sólo 4 cubos.

23 es el 4to primo cuyo período recíproco es de máxima duración.

El número mínimo de varillas rígidas de longitud unitaria necesarias para sujetar/ensamblar un cuadrado es de 23.

23 es el número entero más grande que no es la suma de las distintas potencias.

23! tiene 23 dígitos.

Si hay 23 o más personas en una habitación, la probabilidad de que por lo menos 2 de ellos cumplan años el mismo día es mayor que 50:50.

23,103 45...

La suma de los recíprocos, 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + ... es ilimitada. Tomando suficientes términos, se puede hacer tan grande como uno quiera.

Sin embargo, si se omiten los recíprocos de todos los números que cuando se escriben en base 10 contienen al menos un 0, entonces la suma tiene este límite, 23,10345...

R. P. Boas y J. W. French, 'Partial Sums of Harmonic Series', *American Mathematical Monthly*, 1971.

23,140 692 632 779 269 005 729 086... = e^{π}

Este número es trascendental.

24

El número de horas en un día. También 24 escrúpulos (*scruples*) en una onza, y 24 granos en un penique.

24 es divisible por la suma de sus dígitos y por su producto.

El número más pequeño, el producto de cuyos propios divisores es un cubo. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12 = 24^3$.

La suma de las primeras 24 casillas, que es el número piramidal cuadrado número 24, es en sí misma un cuadrado:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 24^2 = 70^2$$

Esta es la única solución a este patrón, aunque otras secuencias de cuadrados consecutivos que no empiezan con 1 pueden sumar a un cuadrado. Por ejemplo, $18^2 + 19^2 + ... + 28^2 = 77^2$.

Si esferas idénticas en el espacio de 24 dimensiones están dispuestas en un entramado de Leech, cada esfera tocará 196.560 otras esferas. Se trata casi con toda seguridad de la esfera más densa posible en 24 dimensiones.

Las secciones transversales adecuadas de las empaquetaduras de la red de Leech dan lugar a las empaquetaduras más densas conocidas en todas las dimensiones inferiores, excepto en las dimensiones 10, 11 y 13.

N. J. A. Sloane, 'The Packing of Spheres', *Scientific American*, enero de 1984.

Factoriales

$24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ y por lo tanto es factorial de 4, escrito 4! y a menudo leído como 'bang 4' incluso por los matemáticos, o '4 gritos' por los escolares.

n! aumenta de tamaño muy rápidamente de hecho. 20! ya es 2.432.902.008.176.640.000.

Se han calculado muchos factoriales muy grandes. Horace Uhler calculó que, ‘El primer dígito de 450! cae en el lugar 1001 a la izquierda del punto decimal. ...este número puede ser llamado el Factorial de las Noches de Arabia.’

1.000.000! ha sido calculado recientemente por Harry Nelson y David Slowinski, que en dos ocasiones mantuvieron el récord del mayor primo conocido. Tiene 5.565.709 dígitos y la impresión de la computadora era de 5 pulgadas de alto.

La función factorial aparece en todas partes en las matemáticas. Hay diferentes maneras de organizar los objetos en orden.

Hay 52 × 51 × 50 × 49 maneras de elegir 4 cartas de un paquete de 52 si el orden hace una diferencia, y elegir 4H, 3S, QD y JC por ejemplo no es lo mismo que elegir QD, 3S, JC y 4H. 52 × 51 × 50 × 49 se puede escribir muy bien como 52!/48!.

Si el orden no hace ninguna diferencia, entonces cualquiera de las 4! = 24 maneras de elegir las cartas será equivalente, y el total debe ser dividido por 4! Ahora se puede escribir 52!/48!4!.

Tenga en cuenta que los dos factoriales de la parte inferior se pueden multiplicar en cualquier orden. Esto corresponde al hecho de que se pueden seleccionar 4 cartas de entre 52, seleccionando 4 cartas y conservándolas, o seleccionando 48 cartas y tirándolas a la basura.

Los factores aparecen veladamente en el triángulo de Pascal, que fue utilizado por Cardán, Tartaglia, Pascal y otros para resolver problemas de combinaciones y probabilidad, así como para calcular coeficientes binomiales.

Si 52!/48!4! está escrito, como es usual, como $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, o como $({}^{5}{}_{4}{}^{2})$ (¡no importa!) entonces el triángulo de Pascal, a la izquierda, también puede ser escrito como a la derecha:

Lectura a través de la 4ta línea, $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

			1			
		1		1		
	1		2		1	
1		3		3		1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Los registros en el triángulo de Pascal son todos enteros, lo que ilustra el hecho de que el producto de cualquier número entero consecutivo es siempre divisible por *n*!.

Los factoriales también aparecen en los triángulos de diferencia para las secuencias de potencias. Aquí están las diferencias finales para las 5ta potencias de arco de todas las 5!

```
1     32     243     1024     3125     7776     16807    . . .
   31    211    781     2101     4651     9031        . . .
      180    570    1320     2550     4380        . . .
         390    750     1230     1830       . . .
            360    480      600        . . .
               120     120      120      120        . . .
```

También aparece en la serie infinita para e^x y para las relaciones trigonométricas como sen x y cos x.

$$\text{sen } x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + ...$$

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + ...$$

Teniendo en cuenta la conexión entre π, los círculos y las relaciones trigonométricas, la fórmula de Stirling no es increíble, simplemente asombrosa: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Al igual que la relación de Euler, enlaza varios números y funciones importantes, aunque esta fórmula es sólo aproximada, como indica el símbolo ~.

n! es igual de importante en la teoría de los números.

Tanto el teorema de Wilson como su inverso son ciertos: *p* es primo si y sólo si $(p - 1)! + 1$ es divisible por *p*. Leibniz conocía el teorema de Wilson mucho antes de que fuera publicado por Edward Waring en 1770. Fue Waring quien se lo atribuyó a Sir John Wilson dándole su propia inmortalidad. En teoría, se puede utilizar para comprobar si un número es primo. En la práctica, es una prueba absurda, porque es muy grande. No es plausible probar si 23 es primo dividiendo 23 en 22! + 1.

La notación en sí misma es de interés. Las matemáticas exigen notaciones simples, llamativas y apropiadas. ¡Qué más apropiado que el signo de exclamación para una función que aumenta de tamaño tan rápidamente!

Augusto de Morgan, el azote de los cuadradores de círculos y otros desafortunados, se disgustó mucho cuando la '!', que había sido inventada en Alemania por Christian Kramp en 1808, llegó a Inglaterra.

Él escribió,

> Entre las peores barbaridades está la de introducir símbolos que son bastante nuevos en el lenguaje matemático, pero perfectamente entendidos en el lenguaje común. Los escritores han tomado prestada de los alemanes la abreviatura *n*! ... que da a sus páginas la apariencia de expresar admiración por el hecho de que 2, 3, 4, etc., deben ser encontrados en los resultados matemáticos.[21]

Si se hubiera detenido a considerar la psicología de su uso, habría apreciado que los usuarios ignoraran muy rápidamente el aspecto de ¡shock! ¡horror! y vieran, literalmente, sólo su significado matemático.

Factoriales, como los números de Fibonacci, pueden ser usados como base para una anotación de números que no depende de ninguna base en particular. Simplemente divida el número por el factorial más grande debajo de él, luego repita con el resto, y así sucesivamente.

$2000 = (2 \times 720) + (4 \times 120) + (3 \times 24) + (1 \times 6) + (2 \times 1) = (2 \times 6!) + (4 \times 5!) + (3 \times 4!) + (1 \times 3!) + (1 \times 3!) + (1 \times 2!) + (0 \times 1!)$ o 243110 en factorial.

Sumar dos de estos números es complicado y la multiplicación es una especie de pesadilla, pero tienen sus usos especializados.

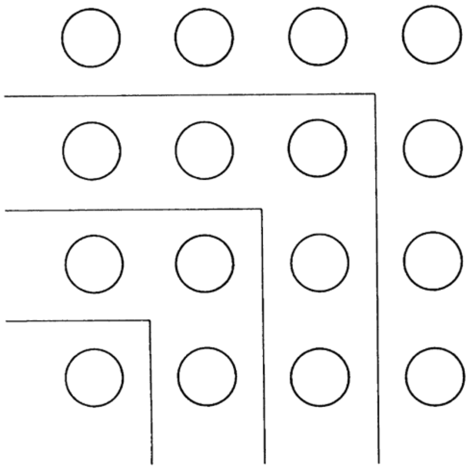
[21] F. Cajori, *A History of Mathematica1Notations*, vol. 2, Open Court, 1929.

H. Uhler, *Mathematics Teacher*, abril de 1953; y F. Gruenberger, ‘Computer Recreations’, en *Scientific American*, abril de 1984.

25

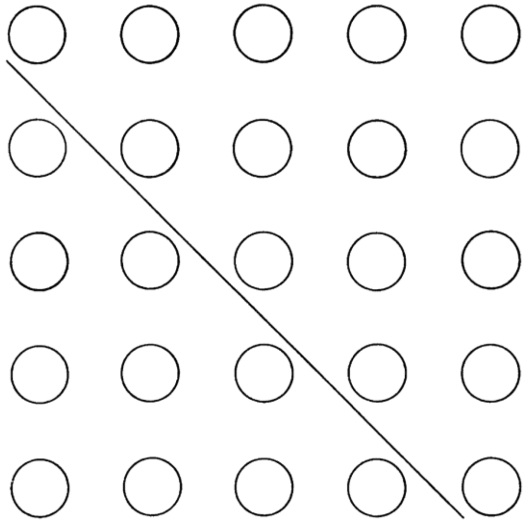
Un cuadrado y la suma de 2 cuadrados: $25 = 3^2 + 4^2 = 5^2$.

Los griegos representaban los cuadrados, como todos los números poligonales, con un patrón de puntos. Para convertir un cuadrado en el siguiente, basta con añadir un borde de puntos a lo largo de dos lados. Los tamaños de estos bordes son los números impares, 1, 3, 5, ...



De ello se deduce que las sumas de la secuencia de números impares son los números cuadrados. En particular, $5^2 = 25 = l + 3 + 5 + 7 + 9$.

Cada cuadrado es también la suma de dos números triangulares: 25 = 10 + 15, que pueden representarse con un patrón de puntos:



o en este patrón numérico:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1 + 2 + 1 &= 2^2 \\ 1 + 2 + 3 + 2 + 1 &= 3^2 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 4^2 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 &= 5^2 \end{aligned}$$

y así sucesivamente...

Siendo un cuadrado impar, es una fuente del siguiente patrón: dividido en 25 números enteros sucesivos, 25 = 12 + 13. Dividir su raíz de la misma manera, 5 = 2 + 3. Entonces los 3 enteros hasta 12 y los 2 enteros de 13 tienen las mismas sumas de cuadrados.

Se inicia el patrón completo:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

y así sucesivamente...

Esto se puede comparar con el patrón: 1 + 2 = 3; 4 + 5 + 6 = 7 + 8; 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 y así sucesivamente.

Todos los poderes de 25 terminan en los mismos dígitos, 25.

25 = 4! + 1. Esta es la única solución de $(n - 1)! + 1 = n^k$. [Liouville]

Fermat afirmó correctamente, sin probar, que $25 = 3^3 - 2$ es el único cuadrado que es 2 menos que un cubo.

26

26 es el número no palíndromo más pequeño cuyo cuadrado es palíndromo: $26^2 = 676$.

26 es igual a la suma de los dígitos de su cubo: $26^3 = 17576$.

27

El primer cubo perfecto impar, aparte de 1.

El número de puntos en todos los colores en el snooker (billar), porque es uno menos que el séptimo número triangular, 28.

La suma de los dígitos de su propio cubo: $27^3 = 19683$.

Todos los números enteros son la suma de un máximo de 27 primos.

027 es el período decimal de 1/37, y a la inversa: 1/27 = 0,037037037...

Si un múltiplo de 3 dígitos de 27 es permutado cíclicamente, de modo que por ejemplo 513 se convierta en 135 o 351, entonces el número resultante sigue siendo un múltiplo de 27. El único otro número con esta propiedad para números de 3 dígitos es el 37.

27 es el entero más pequeño que es la suma de 3 cuadrados de 2 maneras: $27 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 = 5^2 + 1^2 + 1^2$.

El algoritmo de Siracusa comienza con cualquier número, lo divide por 2 si es par y lo multiplica por 3 y añade 1 si es impar. Este proceso se repite. Por ejemplo, la secuencia comienza con 17 ejecuciones:

17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1.

Todos los enteros de menos de 1.000.000.000 han sido probados, y cada uno termina finalmente en la secuencia 4-2-1. De los primeros 50 números enteros, 27 son los más largos, 111 pasos, alcanzando una cota máxima de 9232.

No se sabe si a la larga cada número llega a 1.

28

El número de días en el ciclo lunar.

En el sistema imperial de pesos y medidas, el número de libras en un cuarto.

El 7mo número triangular y el número de dominós en un juego estándar de doble-seis.

El primer número triangular es la suma de 2 cubos: $28 = 1^3 + 3^3$.

La cadena sociable más larga conocida es de 28 eslabones, comenzando con 12.496.

Números perfectos

28 es el segundo número perfecto, después del 6, lo que significa que 28 es la suma de sus divisores, incluyendo la unidad pero excluyéndose a sí misma: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Los primeros 4 números perfectos, 6, 28, 496 y 8128 fueron conocidos por los últimos griegos. Nicómaco e Ibádmaco enumeraron todos los 4 e Ibádmaco, teniendo en cuenta que no tenía ninguna concepción del número base 10 como matemáticamente arbitrario, conjeturó que había un número perfecto para cada número de dígitos, y además que no sólo terminaban en 6 u 8, lo cual es cierto, sino que los 6 y 8 se alternan, lo cual no lo es.

La secuencia de dígitos de la unidad es 6-8-6-8-8-6-6-8-8-6-6-8-8-6-8-8-8... y cada número perfecto termina en 28 o 6 precedido por un dígito impar.

Euclides, cuyos *Elementos* no se limitan a la geometría, probó en el Libro IX que, ‘Si tantos números como queramos partiendo de una unidad se disponen continuando en doble proporción hasta que la suma de todos se convierta en primo, y si la suma multiplicada en el último hace algún número, el producto será perfecto’’.

En otras palabras, si, por ejemplo, 1 + 2 + 4 + 8+ 16 es primo, que lo es, siendo $2^5 – 1 = 31$, entonces 31×16 es perfecto. De hecho es el 496, el tercer número perfecto.

28 es igual a $2^2(2^3 – 1)$ y 6 es igual a $2(2^2 – 1)$.

En cada caso los factores entre corchetes, $2^3 – 1$ y $2^2 – 1$, que son números de Mersenne, son primos. Esta es la condición crítica.

Euclides sólo demostró que su regla era suficiente. Fue Euler, 2000 años después, quien demostró que todos los números perfectos (los números impares perfectos son un asunto muy diferente) son de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$ donde $2^n - 1$ es un primo de Mersenne M_n.

Cada número perfecto es hexagonal y por lo tanto también triangular.

Sólo 28 es la suma de dos potencias iguales: $28 = 3^3 + 1^3$.

De la definición de perfección se deduce que la suma de los recíprocos de los divisores de un número perfecto es 2. Por ejemplo, desde 28 + 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28, podemos dividir por 28 y obtener: 2 = 1/28 + 1/14 + 1/7 + 1/4 + 1/2 + 1/1.

El producto de los factores, incluido él mismo, del número perfecto $P = 2^{n-1}M^n$ es P^n.

Menos obvio, cada número perfecto, excepto el 6, es una suma parcial de la serie $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + ...$ Por ejemplo, $28 = 1^3 + 3^3$ mientras que $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$.

Con la misma excepción, 6, también se desprende de la fórmula de Euclides que la raíz digital de un número perfecto par es 1, o, lo que significa lo mismo, que cada número perfecto deja el 1 restante cuando se divide por 9.

Los números perfectos corresponden uno a uno con los primos de Mersenne, cuya historia temprana se esboza bajo *127*. Mientras sólo se dispusiera de cálculos manuales, el descubrimiento de los primos de Mersenne dependía de la mano de obra humana para realizar los cálculos necesarios, y de teoremas sutiles que mostraban que sólo era necesario probar posibles divisores de un determinado tipo.

El trabajo para un gran número era inmenso. Mersenne mismo declaró que toda la eternidad no sería suficiente para decidir si un número de 15 o 20 dígitos era primo.

En 1814 Peter Barlow en un artículo en *A New Mathematical and Philosophical Dictionary* escribió,

> Euler determinó que $2^{31} - 1 = 2147483647$ es un número primo; y éste es el mayor en la actualidad conocido como tal, y, en consecuencia, el último de los números perfectos arriba mencionados, que depende de esto, es el mayor número

perfecto conocido en la actualidad, y probablemente el mayor que jamás se descubrirá; pues, como son meramente curioso sin ser útil, no es probable que ninguna persona intente encontrar uno más allá de él.[22]

Barlow subestimó la fascinación de los matemáticos por batir récords, y no podía prever la computadora electrónica.

Al permitir millones de cálculos por segundo, la computadora abrió vastos alcances en números que antes habían sido inaccesibles y permitió a los matemáticos hacer un uso efectivo de pruebas mucho más poderosas para la autenticidad. Estas pruebas deciden si *n* es primo, analizando los factores de $n - 1$ o $n + 1$.

Debido a su forma especial, los números de Mersenne y Fermat son más fácil de probar la primacía que cualquier otra forma, y todos los primos que han batido récords recientemente han sido números Mersenne, y han llevado automáticamente a un nuevo número perfecto.

1	$\mathbf{2M_2}$	6	Conocido por los Griegos
2	$\mathbf{2^2M_3}$	**28**	Conocido por los Griegos
3	$\mathbf{2^4M_5}$	496	Conocido por los Griegos
4	$\mathbf{2^6M,}$	**8128**	Conocido por los Griegos
5	$\mathbf{2^{12}M_{I3}}$	33550336	En un manuscrito medieval
6	$2^{16}M_{17}$	8589869056	Cataldi, 1588, M_{17} = 131.071
7	$2^{'8}M_{19}$	137438691328	Cataldi, 1588, M_{19} = 524.387
8	$\mathbf{2^{30}M_{31}}$		Euler, 1772, M_{31} = 2,147,483,647
9	$2^{60}M_{6I}$		Pervusin, 1883
10	$2^{88}M_{89}$		Powers, 1911
11	$2^{106}M_{107}$		Powers, 1914
12	$\mathbf{2^{126}M_{127}}$		Lucas, 1876; E. Fauquembergue, 1914
13	$\mathbf{2^{520}M_{521}}$		SWAC computer, 30 January 1952 National Standards Bureau
14	$2^{606}M_{607}$		Encontrado junto con $2^{520}M_{521}$
15	$2^{1278}M_{1279}$		Encontrado por SWAC, al mismo tiempo
16	$2^{2202}M_{2203}$		Encontrado por SWAC, al mismo tiempo
17	$2^{2280}M_{2281}$		Encontrado por SWAC, al mismo tiempo
18	$2^{3216}M_{3217}$		
19	$2^{4252}M_{4253}$		
20	$2^{4422}M_{4423}$		
21	$2^{9688}M_{9689}$		

[22] Daniel Shanks, *Solved and Unsolved Problems in Number* Theory. vol. I, Spartan Books, 1962.

22	$2^{9940}M_{9941}$	
23	$\mathbf{2^{11212}M_{11213}}$	University of Illinois en Urbana, 1963
24	$\mathbf{2^{19936}M_{19937}}$	Bryant Tuckerman, 1971
25	$\mathbf{2^{21700}M_{21701}}$	Laura Nickel y Curt Noll, 1978
26	$\mathbf{2^{23208}M_{23209}}$	Curt Noll, 1979
27	$\mathbf{2^{44496}M_{44497}}$	Harry Nelson, David Slowinski, 1979
28	$2^{86242}M_{86243}$	Harry Nelson, David Slowinski, 1982
29	$\mathbf{2^{132048}M_{132049}}$	1983
30	$\mathbf{2^{216090}M_{216091}}$	Chevron Geosciences, 1985

En la tabla anterior hay una lista completa de los números perfectos conocidos hasta la fecha: M_p significa primo de Mersenne $2^P - 1$. En **negrita** indica que el número perfecto en sí mismo, o su primo de Mersenne asociado, es una entrada en el cuerpo principal de este diccionario.

Los últimos cuatro fueron encontrados en la supercomputadora CRAY.

¿Es infinito el número de números perfectos? No hay más números perfectos hasta el 27 en esta tabla. La tabla en sí misma muestra números perfectos que ocurren cada vez con menos frecuencia, con algunos saltos sorprendentes. El mayor es del 12do al 13ro, donde el índice de la prima de Mersenne salta de 127 a 520, un aumento de más de cuatro veces en el índice. El índice casi se duplica de nuevo del 14to al 15to al 16to: 607 al 1279 al 2203, del 23ro al 24to, y del 28vo al 29no.

Esto sugiere que los números perfectos se diluyen bastante rápido, pero no dice nada sobre su número total. Podrían desaparecer por completo, o podría haber muchos más entre los inimaginablemente grandes. (Y la mayoría de los números enteros son de hecho inimaginablemente grandes).

Los números impares perfectos son una curiosidad en sí mismos.

Guy describe la existencia de los números impares perfectos como uno de los problemas sin resolver más notorios de la teoría de números, y afirma que Tuckerman, Hagis, Stubblefield, Buxton y Elmore han elevado gradualmente el límite inferior de un perfecto impar por encima de 10^{200}, ‘aunque hay cierto escepticismo sobre las pruebas posteriores’, lo que es alentador para cualquiera que piense que los matemáticos siempre pueden distinguir una prueba de sonido de un buen intento.

Ellos y otros investigadores, sin haber producido ningún impar perfecto, han descubierto mucho sobre ellos, si tiene sentido decir que usted sabe mucho sobre algo que puede no existir.

Descartes afirmaba que un impar perfecto es el producto de un cuadrado y un primo.

Euler demostró que un impar perfecto debe ser de la forma $p^a \times q^b \times r^c$. ... donde los *p, q, r*... son todas de la forma $4n + 1$, *a* es de la misma forma, y *b, c*... son todas iguales.

Llegados a los tiempos modernos, un impar perfecto debe tener al menos 8 factores primos distintos (11 si no es divisible por 3), y debe ser divisible por una potencia primo mayor que 10^{18}.

El mayor factor primo debe ser mayor de 300.000 y el segundo mayor debe ser mayor de 1000.

Cualquier impar perfecto inferior a 10^{9118} es divisible por la 6ta potencia de algún primo.

29

Ninguna suma de tres 4tas potencias es divisible por 5 o 29 a menos que todas lo sean. [Euler]

29 es el tercer número *n*, después de 1 y 5, de tal manera que $2n^2 - 1$ es un cuadrado: $2 \times 29^2 - 1 = 41^2$.

$2n^2 + 29$ es primo para todos los valores de *n* de 1 a 28.

$29 = (2 \times 3 \times 5) - 1$ = primorial (5) – 1.

Primorial (*n*) – 1 es primo para 3, 5, 11, 13, 41, 89, 317, 991, 1873, 2053, y ningún otro valor por debajo de 2377.

J. P. Buhler, R. E. Crandall y M. A. Penk, ‘Primes of the form n! ± 1 and $2 \times 3 \times 5 \times ... \times p \pm 1$’, *Mathematics of Computation*, vol. 38, abril de 1982.

30

Primoriales

El primorial *p* se define sólo si *p* es primo. Es entonces igual al producto de todos los primos menores incluyéndose.

30 = primorial (5) = $5 \times 3 \times 2$

30 es el entero más pequeño con 3 divisores primos distintos, 2, 3 y 5. El más pequeño con 4 divisores primos distintos y primordial es (7) = 2 × 3 × 5 × 7 = 210, y así sucesivamente.

La mayoría de los enteros tienen muy pocos divisores primos distintos. El promedio para los números menores de 100 es de 1,71. Para números menores de 100.000.000 el promedio es sólo de 2,9. Para 10^{100}, un googol, el promedio sigue siendo sólo de 5,4, y para 10^{googol} ha aumentado sólo a 23,9. Los primordiales son excepcionales en este sentido.

30 es el número más grande de tal manera que todos los números menos que él y primos a él son primos en sí mismos.

Los otros números con esta propiedad son 2, 3, 4, 6, 8, 12, 18 y 24. Sólo hay 2 triángulos pitagóricos cuyas áreas equivalen a su perímetro.

Uno es el triángulo 5-12-13, cuyo área y perímetro son ambos de 30. El otro es el triángulo 6-8-10, cuyo área y perímetro son ambos de 24.

30 es el área del rectángulo más pequeño en el que es posible realizar una ruta de reentrada del caballo de ajedrez. Se puede hacer en un tablero de 5 por 6 o en uno de 3 por 10. El tablero cuadrado más pequeño es de 6 por 6.

El dodecaedro y su dual, el icosaedro, tienen cada uno 30 bordes.

30,25

Hay 30,25 (= 5,5 al cuadrado) yardas cuadradas en una barra (*rod*) cuadrada, poste (*pole*) o percha (*perch*), o 272,25 pies cuadrados.

31

$2^5 - 1$. El 5to número de Mersenne y el 3er número primo de Mersenne, que lleva al 3er número perfecto, 496.

$31 = 1 + 5 + 5^2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$

Uno de los dos únicos números conocidos que se pueden escribir de dos maneras como la suma de poderes sucesivos, a partir de 1. El otro es el 8191.

El primer número primo cuyo recíproco tiene un período decimal impar: 1/31 = 0,03225 80645 16129 03225...

Observe estos productos:

032258 × 2 =	64516	032258 × 9 =	290322
032258 × 4 =	129032	032258 × 14 =	451612
032258 × 5 =	161290	032258 × 16 =	516128
032258 × 7 =	225806	032258 × 18 =	580644
032258 × 8 =	258064	032258 × 19 =	612902

y así sucesivamente...

Obsérvese también que 03225 + 80645 + 16129 = 99999 y 032 + 258 + 065 + 416 + 129 = 900.

(2 × 3 × 5) + 1 = primordial (5) + 1

Primorial (n) + 1 es primo para 2, 3, 5, 7, 11, 31, 379, 1019, 1021, 2657, y para ningún otro valor inferior a 3088.

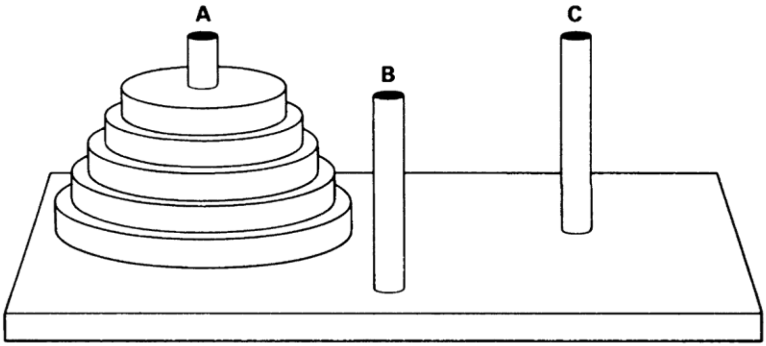
Dos puzzles binarios

La Torre de Hanói fue presentada por Eduard Lucas bajo el nombre de M. Claus en 1883, y un año después proporcionó una historia encantadora pero totalmente ficticia:

> En el gran templo de Benarés, bajo la cúpula que marca el centro del mundo, descansa una placa de latón en la que se fijan tres agujas de diamante, cada una de ellas de un codo de altura y del grosor del cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, en la creación, Dios colocó 64 discos de oro puro, el disco más grande descansando sobre la placa de latón, y los otros cada vez más pequeños hasta el superior. Esta es la Torre de Bramah. Día y noche incesantemente los sacerdotes transfieren los discos de una aguja de diamante a otra de acuerdo con las leyes fijas e inmutables de Bramah, que requieren que el sacerdote en servicio no debe mover más de un disco a la vez y que debe colocar este disco en una aguja para que no haya ningún disco más pequeño debajo. Cuando los 64 discos hayan sido así transferidos de la aguja en la cual Dios los colocó en la creación a una de las otras agujas, torre, templo y brahmanes por igual, se desmoronarán en polvo, y con un trueno el mundo se desvanecerá.

Este relato de la teología hindú es absurdo, pero el problema en sí mismo tiene una solución muy clara que involucra poderes de 2.

En la figura, los 5 anillos de una clavija deben transferirse a una de las otras clavijas.



Se encontrará por ensayo y error que para transferir 1, 2 o 3 anillos se requieren respectivamente 1, 3 y 7 movimientos. En general, para mover $n + 1$ anillos a la clavija A desde la clavija B, se requiere que los anillos n se muevan a la clavija C, que el anillo más grande se mueva a la clavija B y que los primeros *n* anillos se muevan a la clavija B mediante una repetición de la secuencia anterior. Por lo tanto, el número de movimientos necesarios es cada vez más del doble del total anterior.

Por lo tanto, la secuencia continúa 1 3 7 15 31 63 y el término general es $2^n - 1$. Los anillos en la figura requieren 31 movimientos. En la práctica ayuda mentalmente (¡o físicamente!) marcar los anillos como alternadamente impares y pares; si hay un número impar de anillos a mover, el primer movimiento debe ser en la clavija de destino, si es par, en la tercera clavija.

Los sacerdotes brahmanes necesitarían $2^{64} - 1$ o 18.446.744.073.709.551.615 movimientos para completar su tarea, o casi 600,000,000,000 de años a un movimiento por segundo todo el día y todos los días.

Fibonacci consideró el problema del conjunto de pesos más pequeño requerido para pesar cualquier peso hasta una cantidad determinada. Tartaglia resolvió el problema cuando sólo se puede utilizar una bandeja, y Bachet lo resolvió cuando se puede utilizar una o ambas bandejas.

Si las pesas se colocan en un solo plato de la balanza, el peso máximo que se puede pesar con sólo 5 pesas es 31, utilizando los valores 1, 2, 4, 8 y 16. En general, los *n* pesos de esta secuencia pesarán hasta $2^n - 1$.

Cada pesada se realiza de una manera única representada por el valor expresado en binario. Para pesar 26, que es 11010 en binario, usamos las pesas 16, 8 (no la 4) y 2 (pero no la unidad).

Usando ambos platos, la solución es similar, pero ahora depende de expresar el peso como la suma y diferencia de poderes de 3. Con los pesos 1, 3, 9, y 27 es posible pesar hasta 40. En general, los pesos de hasta 3^n pesarán hasta un máximo de $0{,}5(3^{n+1} - 1)$.

Ball and Coxeter, 1974.

32

$32 = 2^5 = 100.000$ en notación binaria.

El punto de fusión del hielo en la escala de temperatura Fahrenheit.

33

Un semi-primo es un número con sólo 2 factores. 33-34-35 es el trío más pequeño de los semi-primos sucesivos.

$33 = 1! + 2! + 3! + 4!$

33 es el número más grande que no es la suma de los distintos números triangulares.

Números afortunados

Los números primos se pueden encontrar usando la Criba de Eratóstenes: escribe los números enteros en orden y táchalos, eliminando los múltiplos de 2. Luego tacha uno de cada tres números en la secuencia original para deshacerse de los múltiplos de 3, y así sucesivamente.

Los números de la suerte se construyen mediante un proceso similar. Primero tache todos los demás números, dejando los números impares:

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19...

Después del 1, el siguiente número impar es el 3, así que tache uno de cada tres números en esta secuencia, saliendo:

1 3 7 9 13 15 19...

El siguiente número que queda es el 7, así que tache cada 7 números, empezando por el 19. Y así sucesivamente.

Los números afortunados son los que quedan. La secuencia comienza:

1 3 7 9 13 15 21 25 31 33 37 43 49 51...

Los números afortunados comparten muchas propiedades con los números primos, lo que sugiere que esas propiedades, sorprendentemente, pertenecen a los primos no porque cada primo no tenga factores sino a sí mismo y a 1, sino por la forma en que los primos pueden ser construidos por el tamiz de Eratóstenes.

Es probable que cualquier secuencia construida por un tamiz similar tenga las mismas propiedades. [Guy]

34

La constante mágica de un cuadrado mágico de 4 por 4.

35

Hay 35 hexominós, cada uno formado por 6 cuadrados unidos de un lado a otro. Sorprendentemente, aunque el área total de los 35 hexominós es de 210, lo que podría formar un rectángulo de 3 × 70 o 5 × 42 o 6 × 35 o 7 × 30 o 10 × 21 o 14 × 15, ninguno de estos rectángulos puede ser rellenado con las 35 piezas.

Después de los hexominós, el número de *n*-ominós aumenta rápidamente. Hay 108 septominós, de los cuales 1 tiene un agujero. Hay 369 octominós, de los cuales 6 tienen un agujero, y 1285 9-ominos, de los cuales 37 tienen un agujero.

Triángulo de Pascal

Los números en el triángulo de Pascal son tan importantes que tuvieron que ser incluidos, aunque ninguno de ellos es más típico del triángulo que otro, así que he elegido a 35 como su representante.

El triángulo lleva el nombre de Blaise Pascal, el matemático brillantemente precoz, científico natural y teólogo que escribió un *Tratado sobre el Triángulo Aritmético*.

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1\\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1
\end{array}$$

Pascal, sin embargo, fue el último y no el primero de muchos matemáticos que consideraron matrices casi idénticas en relación con la extracción de raíces, problemas de probabilidad y combinaciones, y el cálculo de coeficientes binomiales. Él los reunió y construyó sobre la base de sus resultados.

Chu Shih-chieh en *El espejo precioso de los cuatro elementos* (1303) da un arreglo piramidal idéntico a nuestro arreglo moderno, para determinar un coeficiente binomial de otro.[23]

Fue publicado por primera vez en Europa en 1529 y fue dado en diversas formas por, entre otros, Stifel, Tartaglia, que lo usó para calcular la expansión de una 12da potencia, y Cardán, que lo usó en problemas de combinaciones y números poligonales, y por Herigone, que supuestamente fue el maestro de Pascal, y cuyas obras cita el propio Pascal.

Pascal definió el triángulo afirmando que cada celda está ocupada por la suma de las celdas de arriba, siendo las celdas de los bordes la unidad. Primero dedujo diecinueve consecuencias, o, como deberíamos decir, teoremas, incluyendo, ‘En cada triángulo la suma de las celdas de cada base es un número de la progresión doble que comienza con la unidad...’. En otras palabras, la suma de los números de la fila n es 2^n.

(La fila superior, que a veces se omite, cuenta como fila 0.)

A continuación, estudió el ‘orden de los números’ y el uso del triángulo en el cálculo de las combinaciones, la división de las apuestas entre los jugadores y los coeficientes binomiales.

[23] F. N. David, *Games, Gods and Gambling,* Griffin, Londres, 1962.

Los ‘órdenes de los números’ son las diagonales. La primera diagonal está ocupada por unidades, la segunda por los números naturales. La tercera diagonal son los números triangulares, 1, 3, 6, 10... y la cuarta son los números tetraédricos, 1,4, 10, 20, 35... que son los números de balas de cañón necesarias para apilar en pirámides triangulares de tamaño creciente. Las diagonales siguientes pueden interpretarse como arreglos de mayor dimensión, a partir de la 4ta, aunque Pascal no poseía una concepción tan moderna.

Para calcular las ‘combinaciones’, por ejemplo el número de formas de seleccionar 3 platos de un menú de 7, sólo hay que ir al 4to número de la 7ma línea: es 35, o en notación moderna $\binom{7}{3} = 35$ que puede calcularse como $(7 \times 6 \times 5)/(3 \times 2 \times 1)$ o como $7!/3!4!$

Los coeficientes binomiales se encuentran de la misma manera. El coeficiente de x^3 en la expansión de $(1 + x)^7$ es $\binom{7}{3}$ o 35, y la expansión completa es:

$$(1 + x)^7 = 1 + lx + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + lx^6 + x^7$$

De la regla para construir el triángulo se desprende que

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

que Pascal expresó en el lenguaje de órdenes.

El triángulo tiene muchas otras características. El mismo Pascal escribió, ‘...Yo dejo fuera muchas más de las que incluyo; es extraordinario cuán fértil en propiedades es esto. Todo el mundo puede intentarlo con su mano.’

Las entradas en la fila p, excepto las unidades, son divisibles por p si y sólo si p es primo.

Las diagonales poco profundas, 1, 1-1, 1-2, 1-3-1, 1-4-3, 1-5-6-1, 1-6-10-4... suma a la secuencia de Fibonacci, 1 1 2 3 5 8...

Hay un número infinito de filas que contienen tres números en la progresión aritmética, como 7-21-35. Los dos siguientes son 1001-2002-

3003, y 490314-817190-1144066. Por otro lado, no hay tríos de números que formen progresiones geométricas o armónicas.[24]

Hay, sin embargo, una clara conexión con la serie armónica, los recíprocos de los números naturales:

1 = 1

1 – 1/2 = 1/2

1 – (2 × 1/2) + 1/3 = 1/3

1 – (3 × 1/2) + (3 × 1/3) – 1/4 = 1/4

1 – (4 × 1/2) + (6 × 1/3) – (4 × 1/4) + 1/5 = 1/5

y así sucesivamente.[25]

Hay más conexiones con el Triángulo Armónico de Leibniz:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

y así sucesivamente.

Cada fracción aquí es la suma de los números inmediatamente debajo de ella. Los términos en cada fila son el término inicial dividido por las correspondientes entradas del triángulo Pascal.

Cada entrada es la suma de la serie infinita que comienza inmediatamente debajo de ella a la izquierda y continúa hacia abajo a lo largo de la diagonal a la derecha, por ejemplo: 1/4 = 1/5 + 1/30 + 1/105 + ...

[24] T. Motzkin, *Scripta Mathematica* vol. 12.

[25] *Scripta Mathematica*, vol. 8.

En el triángulo de Pascal, cada número es la suma de cualquiera de las dos diagonales que empiezan inmediatamente encima de él y llegan hasta el borde: por ejemplo, 35 = 15 + 10 + 6 + 3 + 1. (Así que la suma de los primeros 5 números triangulares es 35.)

Las primeras filas del triángulo de Pascal pueden dar la impresión de que casi todas sus entradas son diferentes, excepto la simetría izquierda-derecha y las unidades de borde. Esto no es así, como podría sugerir la aparición de tres 6s y cuatro 10s. (*Ver **3003***.)

36

El 8vo número triangular, pensado por los griegos como también la suma de los primeros 4 números pares y los primeros 4 impares.

También es cuadrado, y el primer número después del 1 es tanto cuadrado como triangular.

Los números que son tanto cuadrados como triangulares están bellamente relacionados con las mejores aproximaciones a $\sqrt{2}$:

número	*raíz*	*Factores de la raíz*
1	1	1 × 1
36	6	2 × 3
1225	35	5 × 7
41616	204	12 × 17

y así sucesivamente.

En cada caso los factores de la raíz son el numerador y denominador de la siguiente aproximación a $\sqrt{2}$.

Debido a que su raíz cuadrada es el 3er número triangular, es también la suma de los 3 primeros cubos: $36 = 1^3 + 2^3 + 3^3$.

1-6-36 es el primer conjunto de números triangulares en progresión geométrica.

36 es el número de 2 dígitos más grande divisible por el producto de sus dígitos. Cada secuencia de 7 números consecutivos mayores a 36 incluye un múltiplo de un primo mayor a 41.

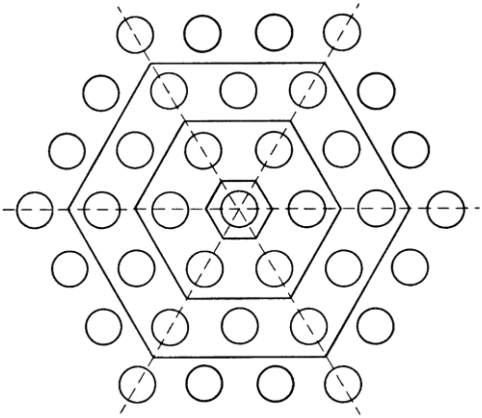
H. Gupta, *Selected Topics in Number Theory*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1980.

37

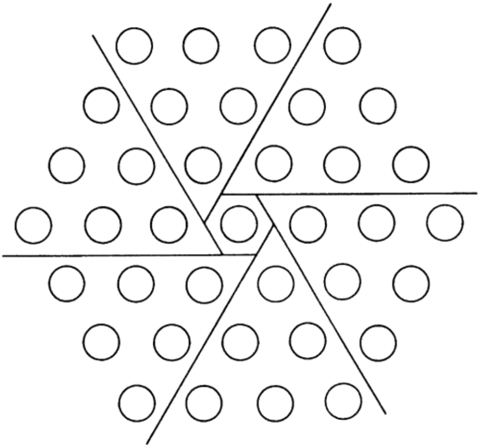
Cualquier múltiplo de 3 dígitos de 37 permanece como múltiplo cuando sus dígitos están permutados cíclicamente.

Cada número es la suma de un máximo de 37 quintas potencias.

El 4to número hexagonal centrado, que se obtiene colocando capas hexagonales de puntos alrededor de un punto central.



La fórmula para el número hexagonal centrado n-ésimo es $3n(n - 1) + 1$. Por una división diferente del diagrama original el número hexagonal n-ésimo centrado es igual a $6T_{n-1} + 1$, donde T_n es el n-ésimo número triangular.



38

La constante mágica en el único hexágono mágico posible, que utiliza los números del 1 al 19.

39

Este parece ser el primer número sin interés, lo que por supuesto lo convierte en un número especialmente interesante, porque es el número más pequeño que tiene la propiedad de ser sin interés.

Por lo tanto, es también el primer número en ser simultáneamente interesante y poco interesante.

40

Igual a dos veintenas. Una expresión bíblica por un largo período de tiempo, por ejemplo, 40 días en el desierto, 40 años de vagar por el desierto. Hay 40 barras, perchas o postes en un estadio de 220 yardas.

41

Los múltiplos de 5 dígitos de 41 siguen siendo múltiplos de 41 cuando sus dígitos se permutan cíclicamente.

Euler descubrió la excelente y famosa fórmula $x^2 + x + 41$, que da valores primos para a = 0 a 39

No existe una fórmula cuadrática de la forma $x^2 + ax + b$, con coeficientes *a* y *b* positivos y menos de 10.000, lo que produce una secuencia más larga de primos. [Devlin]

La fórmula '41' también da valores primos para valores negativos de –1 a –40 pero este es el mismo conjunto de primos repetidos.

La fórmula $x^2 - 79x + 1601$ es sólo una variación de la fórmula '41'. Da valores primos para $x = 0$ a 79, repitiendo cada primo una vez.

Cuando Charles Babbage construyó una pequeña versión de prueba de su Máquina Analítica, calculó una lista de valores de esta función para mostrar sus poderes. En una demostración, se registra,

> TREINTA Y DOS números de la misma tabla fueron calculados en el espacio de DOS MINUTOS Y TREINTA SEGUNDOS; y como estos contenían OCHENTA Y DOS cifras, el motor produjo treinta y tres cifras cada minuto, o más de una cifra cada dos segundos. En otra ocasión produjo CUARENTA Y CUATRO figuras por minuto. Este ritmo de cálculo podría mantenerse durante cualquier período de tiempo; y es probable que pocos escritores sean capaces de copiar con la misma velocidad durante muchas horas juntos[26]

Los escritores a los que se hace referencia son los copistas que anotaron las cifras que la máquina producía. Por supuesto, mucho después de los brillantes experimentos de Babbage, y mucho después del desarrollo de la calculadora de escritorio, los prodigios del cálculo eran mucho más rápidos que cualquier máquina. De hecho, si se tiene en cuenta el tiempo que se tarda en instruir a la máquina, podrían vencer a los primeros ordenadores en muchos desafíos.

En contraste, Morrison y Brillhart factorizaron el número 173 de Fibonacci, 638.817.435.613.190.341.905.763.972.389.505.493 en algo más

[26] Sir David Brewster, *Letters on Natural Magic*, Londres, 1856.

de 800 segundos en sus dos factores primos. Con un ligero cambio en la prueba, podría haberse completado en menos de 200 segundos.

42

La constante mágica del cubo mágico más pequeño, compuesto por los números del 1 al 27.

Números de Catalan

El 42 es el 5to número de Catalan.

La secuencia comienza: 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862 16796 58786 208012 742900 2674440...

La fórmula para el *n*-ésimo término es $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (La secuencia a veces comienza con un 1 extra, por lo tanto: 1 1 2 5 14... en cuyo caso la fórmula debe ser ajustada en consecuencia.)

Literalmente se han estudiado cientos de secuencias para la solución de problemas matemáticos, o se han estudiado por sí mismas.

Las secuencias más importantes, como los números cuadrados y los factoriales, aparecen en todas partes. La secuencia de Catalan está en el Top 40 de popularidad, aunque no llegue al Top Ten. Se presenta especialmente en problemas combinatorios.

¿De cuántas maneras se puede dividir un *n*-gono regular en $n - 2$ triángulos, si las diferentes orientaciones se cuentan por separado? La respuesta es la secuencia de Catalan.

¿De cuántas maneras se pueden colocar paréntesis alrededor de una secuencia de $n + 1$ letras, de modo que haya dos letras dentro de cada par de paréntesis?

ab en 1 sentido: (*ab*)

abc de 2 maneras: (*ab*)*c* *a*(*bc*)

abcd de 5 maneras: (*ab*) (*cd*) *a*((*bc*)*d*) ((*ab*)*c*)*d* *a*(*b*(*cd*)) (*a*(*bc*))*d* y así sucesivamente.

¿De cuántas maneras se puede mover en un gráfico desde el origen hasta el $(2n + 2,0)$ con pasos diagonales, sin tocar nunca el eje *x*, excepto al principio y al final? Catalan una vez más.

¿De cuántas maneras se pueden emitir *n* votos entre dos candidatos, de modo que un candidato elegido nunca se quede atrás en el recuento?

La respuesta a cada uno de estos problemas es la secuencia de números de Catalan, lo que demuestra que estos problemas aparentemente muy diferentes son, en el sentido de su utilidad, equivalentes entre sí.

44

La solución de Euler al problema de encontrar un ladrillo con bordes integrales y diagonales de cara es 44, 117 y 240.

Las longitudes de las diagonales de las caras son 267, 125 y 244. La longitud de la diagonal del espacio no es un número entero. El problema de encontrar un ladrillo en el que todas las diagonales sean integrales sigue sin resolverse.

Subfactoriales

Subfactorial 5 = 5!(1 – 1/1! + 1/2! – 1/3! + 1/4! – 1/5!) = 44

Nicolaus Bernoulli consideró por primera vez el problema que puede expresarse de la siguiente manera: *n* cartas se redactan a distintas direcciones, y se preparan *n* sobres que coinciden con las cartas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar las cartas en los sobres para que cada carta esté en el sobre equivocado?

La respuesta es subfactorial *n* (expresado !*n*).

La secuencia comienza: 0 1 2 9 44 265 1854 14833...

45

El tercer número más pequeño de Kaprekar, después del 1 y el 9.

Cada número mayor de 45 es la suma de primos distintos mayores de 11.

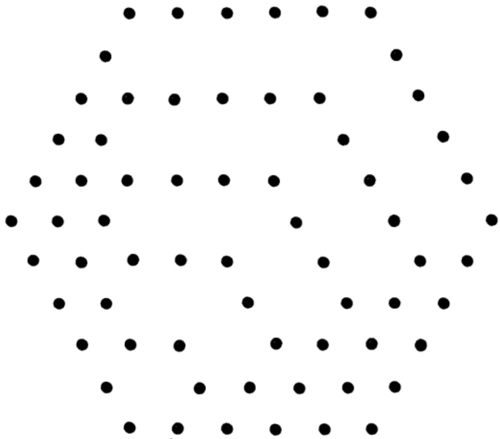
H. Gupta, *Selected Topics in Number Theory*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1980.

Números poligonales

45 es el quinto número hexagonal, que puede calcularse a partir de la fórmula $n(2n - 1)$ cuando $n = 5$.

Comienza la secuencia de números hexagonales: 1 6 15 28 45...

Los griegos estudiaron los números poligonales. Eran un desarrollo natural de los números triangulares y cuadrados, y también pueden ser representados por patrones de puntos:



Los números poligonales se pueden construir dibujando patrones similares, pero con un mayor número de lados.

Hay fórmulas para cada secuencia poligonal, y éstas también forman un patrón:

nombre	*fórmula*	*n = 1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7 ...*
triangular	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1	3	6	10	15	21	28 ...
cuadrado	$\frac{1}{2}n(2n-0)$	1	4	9	16	25	36	49 ...
pentagonal	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1	5	12	22	35	51	70 ...
hexagonal	$\frac{1}{2}n(4n-2)$	1	6	15	28	45	66	91 ...
heptagonal	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	1	7	18	34	55	81	112 ...
octagonal	$\frac{1}{2}n(6n-4)$	1	8	21	40	65	96	133 ...
y así...								

Típicamente, el número 1 es simultáneamente triangular, cuadrado, pentagonal... ¡y así sucesivamente para siempre!

Los números hexagonales son iguales a los números triangulares alternativos. Todos los números perfectos son hexagonales y por lo tanto triangulares también.

Hay otros patrones obvios en esta tabla. Las diferencias verticales son constantes en cada columna. Así, los 5tos números de cada orden difieren en 10 que es el 4to número triangular, y todos son divisibles por 5: 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75...

Las diferencias horizontales son los números naturales para los números triangulares; los números impares para los cuadrados; la secuencia 4, 7, 10, 13... para los números pentagonales; 5, 9, 13, 17... para los hexagonales y así sucesivamente.

Tome cualquier cuadrado de entradas, digamos 18-34 y 21-40. Multiplique las esquinas opuestas y reste: $(18 \times 40) - (34 \times 21) = 720 - 714 = 6$, el número triangular en la cabeza de la columna 18-21.

Hay otras relaciones entre los números poligonales. Por ejemplo, $H_n = 4T_{n-1} + n$, donde H_n es el n-ésimo número hexagonal, y T_n el n-ésimo triangular. Relaciones como esta pueden ser usadas para encontrar la suma de la secuencia de números hexagonales.

46

Un famoso, o infame, ejemplo de numerología: en el Salmo 46, la palabra 46ta es 'sacudir'. La 46ta palabra desde el final contando hacia atrás es lanza. ¡Shakespear![27]

¿Por qué? Bueno, cuando se completó la versión autorizada de la versión King James en 1610, Shakespear tenía 46 años. ¡Caramba!

47

$47 + 2 = 49$: $47 \times 2 = 94$

48

El producto de todos los divisores propios de 48 es igual a 48^4.

Si n es mayor de 48, entonces hay un primo entre n y $9n/8$, inclusive.

[27] Sacudir: *shake* y lanza: *spear*.

49

49 es trimorfo. Su cubo termina en los mismos dígitos: $49^3 = 117649$.

Este es un ejemplo de un número trimorfo que no es automorfo. 1/49 = 0,020408163265…, en el cual los poderes de 2 aparecen en secuencia, eventualmente superponiéndose de tal manera que el patrón, aunque todavía está allí, no puede ser visto.

49 es el primer número compuesto con la propiedad de que todas las fracciones $n/49$, siempre que n no sea un múltiplo de 7, tienen períodos que son permutaciones cíclicas entre sí.

Hay 42 fracciones de este tipo, en todo el período 42.

Esto ocurre si y sólo si el número es una potencia de un primo cuyo recíproco tiene período máximo. En este caso $49 = 7^2$ y 1/7 tiene el período 6.

50

Denominado por la letra L en números romanos. Los romanos tenían letras separadas para 1, 10, 100, 1000, y para 5, 50 y 500.

La letra V representaba 5, y a menudo se conjetura que representa una mano de cinco dedos, en cuyo caso la X de 10 podría ser de dos manos, o alternativamente podría ser una abreviatura de una fila de 1s con una línea a través de ellos para mostrar que el número redondo 10 había sido alcanzado.

100 era C, la primera letra de *centum*, y 1000 era M, la letra inicial de *mille*. En el medio vino D por 500.

Al usar estas letras intermedias era menos tedioso y ocupaba menos espacio para escribir números como 856 o DCCCLVI, que de otra manera serían el monstruoso CCCCCCCCXXXXXIIIIII.

50 es el número más pequeño que es la suma de dos cuadrados de dos maneras diferentes: $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$.

Esto se deduce del hecho de que $50 = 5 \times 10$, los dos números más pequeños que son cada uno la suma de dos cuadrados.

En un pasaje de su *República*, Platón se refiere a la ‘diagonal racional de 5’ que significa 7, que, debido a que $7^2 = 50 - 1$, está muy cerca de ser la raíz cuadrada de 50, y la diagonal de un cuadrado del lado 5. Platón sabía que el diámetro real, $5\sqrt{2}$, es irracional.

La secuencia de números que son sumas de cuadrados de dos maneras continúa: 50 65 85 145...

52

El número de semanas en un año, dividido en 4 cuartos de 13 semanas cada uno, y también el número de cartas en un paquete estándar sin comodines, dividido en 4 palos de 13 cartas cada uno.

Erdös llama a un número 'intocable' si no es nunca la suma de los divisores propios de ningún otro número.

Comienza la secuencia de los números intocables: 2 5 52 88 96 120...

53

El primo más pequeño de tal manera que el período de su recíproco es un cuarto de la longitud máxima posible, en este caso, un cuarto de 53 – 1, o 13.

Todas las fracciones $k/53$, donde k: es un número entre 1 y 52, se dividen en 4 clases, siendo el período decimal de cada fracción de la misma clase una permutación cíclica de las demás de su clase.

55

El décimo número triangular: $55 = 0{,}5 \times 10 \times 11$.

También es de Fibonacci. Los únicos números de Fibonacci que son triangulares son 0, 1, 3, 21 y 55.

55, 66 y 666 son los únicos números triangulares con menos de 30 dígitos que se componen de un dígito repetido.

Números piramidales

El quinto número piramidal cuadrado. Si las balas de cañón se apilan de manera que cada capa es un cuadrado, entonces el número total de balas en pilas sucesivas será 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140... La fórmula general para el número n-ésimo en la secuencia es $\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

Se pueden definir más números piramidales imaginando que las bolas se apilan en capas pentagonales, hexagonales, etc., pero ya no es posible apilar físicamente las bolas en un patrón regular.

La fórmula para el número de bolas en la n-ésima 'pirámide pentagonal' es especialmente sencilla: $\frac{1}{2}n^2(n + 1)$.

Encontrar todos los números que son simultáneamente triangulares y cuadrados piramidales es un problema sin resolver. Las únicas soluciones conocidas son 1, 55, 91, 208335.

55 es el cuarto número de Kaprekar.

55 es una invariante digital cúbica recurrente. Sume los cubos de sus dígitos; repita dos veces, y 55 aparecerá de nuevo:

$$55: 5^3 + 5^3 = 250: \ 2^3 + 5^3 + 0^3 = 133: \ 1^3 + 3^3 + 3^3 = 55$$

Cada número mayor de 55 es la suma de los distintos primos de la forma $4n + 3$.

Sólo hay 55 conjuntos de números enteros *a, b, c, d* para los cuales es cierto que cada número entero es de la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2$.

G. H. Hardy, *Collected Papers of S. Ramanujan*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

56

Números tetraédricos

El 6to número tetraédrico. La secuencia es la siguiente: 1 4 10 20 35 56 84 120... con fórmula general: $\frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$.

El ejemplo tradicional de estos números es una pila de balas de cañón. El número de bolas en cada capa es, de arriba hacia abajo, 1, 3, 6, 10, 15... que es la secuencia de números triangulares, naturalmente, porque cada capa tiene forma triangular.

Así que los números tetraédricos pueden ser considerados como las sumas de los números triangulares. Continuando en dimensiones más elevadas, en el espacio de 4 dimensiones, los montones de números tetraédricos pueden ser apilados en 'tetraedros' de 4 dimensiones, formando los números 'tetraédricos' de 4 dimensiones: 1 5 15 35 35 70... cuya fórmula general es $^1/_{24}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

57,296...

Aproximadamente 57 grados y 18 minutos. El número de grados en 1 radián.

59

Euler planteó el problema en 1772: encontrar un número que es la suma de dos 4tas potencias de dos maneras. También encontró la solución más pequeña: $59^4 + 158^4 = 133^4 + 134^4$.

60

La base de un sistema sexadecimal de conteo.

Los sumerios ya en el 3500 a.C. tenían un sistema decimal para fines comerciales y un sistema sexadecimal utilizado por un pequeño número de expertos, basado en 10 y 6 años: 1, 10, 60, 600, 3600, 36000...

Los babilonios usaban este sistema sexadecimal para trabajos matemáticos y astronómicos.

Los sistemas basados en 60 se benefician de los muchos factores de 60. Tienen las ventajas de un sistema duodecimal, y más.

En astronomía, la muy antigua división del Zodíaco en 12 partes encaja muy bien en un sistema sexadecimal, y no encaja en absoluto en un sistema decimal.

La división del círculo en 360 grados, y la división de los grados en 60 y 3600 partes se originó entre los astrónomos babilonios unos pocos siglos antes de Cristo.

Todavía dividimos una hora de tiempo o un ángulo de un grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Estas son las únicas medidas comunes que no han sido metrificadas.

60 grados es el ángulo interior de un triángulo equilátero.

Números altamente compuestos

El octavo número ‘altamente compuesto’, definido por Ramanujan como un número que, contando desde 1, establece un récord para el número de sus divisores. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ es el primer número con 12 divisores.

La secuencia de los números ‘altamente compuestos’ comienza: 2 4 6 12 24 36 48 60 120 180 240 360 720 840 1260 1680 2520 5040

G. H. Hardy, *Collected Papers of S. Ramanujan*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

61

1318820881^2 = 1739288516161616161 *(Ver también **21**.)*

63

El proceso de Kaprekar para números de 2 dígitos conduce al ciclo: 63-27-45-9-81-63... En este ciclo, 9 debe ser leído como el número de 2 dígitos 09.

Por ejemplo, empezando por 5 y 3: 53 – 35 = 18; 81 – 18 = 63, introduciendo el ciclo. O bien, comenzando con 9 y 3: 93 – 39 = 54; 54 – 45 = 9, introduciendo el ciclo en un punto diferente.

64

La segunda 6ta potencia, después de 1, y también un cuadrado y un cubo: $64 = 4^3 = 8^2 = 2^6$.

Por lo tanto, está representado por 100 en octal y por 1.000.000 en binario.

El número más pequeño con 6 factores primos. Los siguientes más pequeños son 96, 128 (que tiene 7) y 144.

Siendo un cubo, es la suma de números hexagonales centrados consecutivamente: 1 + 7 + 19 + 37 = 64.

El Pequeño Teorema de Fermat dice que si p es primo entonces $a^{(p-1)} - 1$ es divisible por p, siempre que a no sea divisible por p.

Para cada primo p, hay unos valores tal que $a^{(p-1)} - 1$ es realmente divisible por p^2.

El valor más pequeño para $p = 3$ es $8^2 = 64$: 64 – 1 es divisible por $3^2 = 9$.

Para $p = 5$, el siguiente primo, la solución más pequeña es $7^4 - 1$, que es divisible por 25.

65

El segundo número es la suma de dos cuadrados de dos maneras: $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$.

65 es la constante mágica en un cuadrado mágico de 5 por 5.

66

La suma de los divisores de 66, incluyendo el propio 66, es un cuadrado: $1 + 2 + 3 + 6+ 11 + 22 + 33 + 66 = 144 = 12^2$.

La secuencia de números con esta propiedad comienza:: 3 22 66 70 81...

69

El único número cuyo cuadrado y cubo entre ellos utiliza todos los dígitos del 0 al 9 una vez cada uno: $69^2 = 4761$ and $69^3 = 328509$.

70

La suma de sus divisores, incluyendo 70 en sí, es un cuadrado, 144.

Números raros

El número raro más pequeño. Un número se llama raro si es abundante sin ser la suma de ningún conjunto de sus propios divisores. Los factores de 70 son 1, 2, 5, 7, 10, 14 y 35, que suman 74, por lo que es abundante, pero ningún conjunto de ellos suma 70.

Los números raros son escasos. Los únicos por debajo de 10.000 son 70, 836, 4030, 5830, 7192, 7912 y 9272.

Nótese que todos son pares. No se sabe si existe un número raro impar. El profesor Pal Erdös, que tiene el encantador hábito de ofrecer dinero por las soluciones a los desafíos matemáticos, proponía, en 1971, 10 dólares por el primer ejemplo de un número raro impar, o 25 dólares por una prueba de que no existe ninguno. ¡Esto muestra un buen juicio del valor relativo de un contraejemplo y una prueba!

71

$71^2 = 7! + 1$. Esta es la solución más grande conocida para el problema de Brocard.

$71^3 = 357911$. Los dígitos son los números impares del 3 al 11 en secuencia.[28] Los números 5, 71 y 369119 son los únicos números menores de 2.000.000 que dividen la suma de los primos menos que ellos.[29]

72

$\varphi(12) = \varphi(78) = \varphi(84) = \varphi(90) = 24$

Este es el conjunto más pequeño de cuatro números en progresión aritmética cuyos valores de φ son iguales.

Las siguientes dos progresiones aritméticas de 4 términos con valores iguales de φ comienzan en 216 y 76236 y cada una también tiene una diferencia común, 6.[30]

$72^5 = 19^5 + 43^5 + 46^5 + 47^5 + 47^5 + 67^5$ es la 5ta potencia más pequeña igual a la suma de otras cinco 5tas potencias.

73

Todos los números enteros pueden representarse como la suma de un máximo de 73 sextas potencias.

76

$76^2 = 5776$, que termina en los dígitos 76, que por lo tanto se denominan automorfos.

El único otro número automorfo de 2 dígitos por debajo de 100 es 25. Los números automorfos están relacionados con múltiplos de potencias de 10. Por ejemplo, $76 \times 75 = 57 \times 10^2$.

77

---

[28] James Davies, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13.

[29] Ibid, vol. 14

[30] M. Lai and P Gillard, *Mathematics of Computation*, vol. 26

Cada número mayor que 77 es la suma de enteros, la suma de cuyos recíprocos es 1.

Por ejemplo, 78 = 2 + 6 + 8 + 10 + 12 + 40 y 1/2 + 1/6 + 1/8 + 1/10 + 1/12 + 1/40 = 1.

R. L. Graham,'A Theorem on Partitions', *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1963; citado en Le Lionnais, 1983.

79

El número más pequeño que no puede ser representado por menos de 19 cuartas potencias: $79 = 15 \times 1^4 + 4 \times 2^4$.

81

$81 = 3^4$

La suma de los divisores de 81 es 121, un cuadrado.

La fracción 1/81 = 0,012345679 012345679 012...

Este patrón ocurre porque $81 = 9^2$ y 9 es 1 menos que 10, la base del sistema decimal.

En otra base, 6 por ejemplo, el recíproco de $(6 - l)^2$ es 1/41 = 0,0123501235 0123235...

81 es el único número cuya raíz cuadrada es igual a la suma de sus dígitos, aparte de los triviales 0 y 1.

El 81 es cuadrado y heptagonal.

Escribe los números naturales en grupos, así:

1 2,3 4,5,6 7,8,9,10 11,12,13,14,15...

La suma de los primeros n grupos restantes es entonces n^4.[31] Por ejemplo,

$$1 + 4 + 5 + 6 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 81 = 3^4$$

Este patrón es más sencillo:

$$1 = 3^0$$

$$2 + 3 + 4 = 3^2$$

[31] Dov Juzuk, *Scripta Mathematica*, 1939.

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 3^4$$

$$14 + 15 + 16 + ... + 39 + 40 = 3^6$$

y así sucesivamente.[32] El número de términos en cada secuencia es 1, 3, 9, 27...

84

Poco se sabe de la vida de Diofante. Este versículo de la *Antología Griega* pretende dar su edad, que resulta ser de 84 años.

Esta tumba contiene a Diofante ¡Ah, qué maravilla! La tumba cuenta científicamente la medida de su vida. Dios le concedió ser un niño por una sexta parte de su vida, y agregando una duodécima parte a esto, vistió sus mejillas de plumón. Le encendió la luz del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le dio un hijo. ¡Ay, pobre niño tardío! Después de alcanzar la medida de la mitad de la vida de su padre, el Destino Frío se lo llevó. Después de consolar su dolor con el estudio de los números durante cuatro años, Diofante acabó con su vida.

85

La suma de dos cuadrados en dos sentidos: $85 = 9^2 + 2^2 = 7^2 + 6^2$.

88

88 es en sí mismo un dígito repetido, y su cuadrado termina en un dígito repetido: $88^2 = 7744$.

89

89 y 97 son el primer par de primos consecutivos que difieren en 8.

Doble 89 y añada 1: repita, para obtener una secuencia de 6 primos, 89 179 359 719 1439 2879.

¡Ésta es la secuencia de 6 primos más pequeña.[33]

---

[32] M. N. Khatri, *Scripta Mathematica*, vol. 20

[33] *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13.

Sume los cuadrados de los dígitos de cualquier número: repita este proceso y, eventualmente, el número o bien se atasca en 1, o bien da la vuelta a este ciclo: 89-145-42-20-4-16-37-58-89...

89 y 98 son los números de dos dígitos que requieren la mayoría de las inversiones y sumas para convertirse en palíndromos. Cada uno de ellos requiere 24 pasos.

89 es el 11º número de Fibonacci, y el período de su recíproco es generado por la secuencia de Fibonacci: 1/89 = 0,11235...

90

El número de grados en un ángulo recto.

91

El número de días en un trimestre del año, contado como 13 semanas de 7 días cada una.

91 es simultáneamente triangular, igual a 1 + 2 + 3 + ... + 13; piramidal cuadrado, igual a $1^2 + 2^2 + ... + 6^2$; y un número hexagonal centrado igual a 1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30.

91 es el seudoprimo más pequeño en base 3. Es decir, $3^{90} - 1$ es divisible por 91 aunque 91 no es un primo sino 7 × 13.

94

El número par más pequeño aparte de 2 y 4 que no es la suma de dos de la secuencia de primos gemelos: 3 5 7 11 13 17 19 29 31 41 43...

96 y 98 tampoco son la suma de dos primos gemelos. Los siguientes números en fallar son 514, 516 y 518.

96

El segundo número más pequeño con 6 factores primos: 96 = 3 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2.

97

El período de su recíproco decimal es un máximo, de longitud 96. Alexander Aitken, un calculista experto que también era profesor de matemáticas en la Universidad de Edimburgo, lo sabía de memoria.

Apenas le habrá ayudado el hecho de que empiece con las potencias de 3 (porque 97 = 100 – 3):

1/97 = 0,010309 278350 515463 917525 773195 876288 659793 814432 989690 721649 484536 082474 226804 123711 340206 185567...

98

El período de su recíproco decimal comienza con las potencias de 2: 1/98 = 0,010204081632653061224489795918367346938775510204...

99

1/99 = 0 010101010101...

9 y 11 tienen recíprocos muy simples como decimales, porque 9 × 11 = 99.

Del mismo modo, 27 × 37 = 999.

99 es un número Kaprekar, como lo es cualquier cadena de 9s. 99^2 = 9801 y 98 + 01 = 99.

100

El cuadrado de 10, la base del sistema decimal, pero también el cuadrado de la base en cualquier otra base.

El punto de ebullición del agua en la escala de temperatura Celsius (centígrado).

Denotado por C por los romanos, de *centum* que significa cien.

En el sistema métrico, el prefijo ‘centi’ significa centésima, como en centímetros, centésima de metro.

Debido a que 10 es el cuarto número triangular, 100 = 10^2 es la suma de los primeros 4 cubos: 100 = $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

Es un rompecabezas muy antiguo unir los dígitos del 1 al 9, en ese orden, usando sólo los signos usuales de las operaciones, y los paréntesis, para hacer un total de 100.

Dudeney da muchas soluciones, incluyendo esta, que él describe como la respuesta habitual:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (8 \times 9) = 100$ Su solución preferida, porque requiere el uso de sólo 3 signos, es:

$123 - 45 - 67 + 89 = 100$

101

No se sabe si hay un número infinito de primos palíndromos. 101 es el más pequeño, aparte de los primos de 1 dígito, 2, 3, 5 y 7, y 11.

Los otros primos palíndromos por debajo de 1000 son 131, 151, 181, 313, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929.

102

$102^7 = 12^7 + 35^7 + 53^7 + 58^7 + 64^7 + 83^7 + 85^7 + 90^7$

102 es la séptima potencia más pequeña que es la suma de sólo otras 8 séptimas potencias.

103

103 es el primo más pequeño cuyo período recíproco es un tercio de la longitud máxima.

1/103 tiene período de duración 34. Un tercio de todas las fracciones n/103 donde n es menor de 103 tienen períodos que son permutaciones cíclicas de esto. Los otros dos tercios comparten dos períodos diferentes de 34 dígitos.

104

104 es semiperfecto, porque es la suma de algunos de sus propios divisores: 104 = 52 + 26 + 13 + 8 + 4 + 1.

Es irreductiblemente semiperfecto porque ningún factor de 104 es en sí mismo semiperfecto.

105

105 menos cualquier potencia de 2 de 2 a 64 es también primo.

Los únicos otros números conocidos con esta propiedad son 7, 15, 21, 45 y 75. Erdös ha conjeturado que no hay más, y esto ha sido verificado hasta 2^{44}.

105 es el número más pequeño tal que 1 puede ser representado como una suma de recíprocos impares, ninguno de ellos inferior a 1/105: 1 = 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/33 + 1/35 + 1/45 + 1/55 + 1/77 + 1/105.

Hay 4 maneras de representar 1 como la suma de recíprocos impares, usando sólo 9 de ellos, pero en cada caso el más pequeño es menor que 1/105. La solución con el término mínimo más grande es: 1 = 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/15 + 1/35 + 1/45 + 1/235.

F. H. Kierstead y H. Nelson, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 10.

108

Hay 108 heptominós, uno de los cuales rodea un agujero. Tiene la forma de un cuadrado de 3 por 3 con una esquina y sin el cuadrado central. Este es el poliominó más pequeño que contiene un agujero.

111

La constante mágica para el cuadrado mágico más pequeño compuesto sólo de números primos, contando 1 como primo.

El segundo repunit, compuesto sólo por la cifra 1.

112

Hay 112 = 4 × 28 libras en un quintal.

La longitud del lado de la disección más pequeña posible de un cuadrado en otros 21 cuadrados distintos.

113

El primo de 3 dígitos más pequeño, de modo que todos los demás arreglos de sus dígitos también son números primos.

Los otros números primos son 337 y 199, y sus reordenamientos.

Los primos de 2 dígitos con esta propiedad son 11, 13, 17, 37 y 79.

116

116! + 1 es primo.

118

118 es el número más pequeño que se puede escribir como la suma de cuatro tríos, cuyos productos son todos iguales: 118 = 14 + 50 + 54 = 15 + 40 + 63 = 18 + 30 + 70 = 21 + 25 + 72.

El producto de cada triple es 37800. [Guy]

Si n es mayor o igual que 118, entonces el intervalo n a $4n/3$ inclusive contiene un número primo de cada una de las formas $4n + 1$, $4n – 1$, $6n + 1$ y $6n – 1$.

120

120 = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 = 5!

120 es también el 15to número triangular y el 8vo número tetraédrico, formado por la suma de los números triangulares: 120 = 1 + 3 + 6 + 10 + ... + 28 + 36.

120 es el número más pequeño que aparece 6 veces en el triángulo de Pascal.

Es el múltiplo más pequeño de 6, de modo que $6n + 1$ y $6n – 1$ son ambos compuestos.

120 es el número más pequeño que tiene $16 = 2^4$ divisores. El número más pequeño que tiene divisores de 2^n se encuentra multiplicando juntos los primeros n números en esta secuencia: 2 3 4 5 7 9 11 13 16 17 19 23 25 29... que incluye todos los primos y las potencias de los primos.

Números múltiplos-perfectos

El ubicuo Marin Mersenne descubrió que los factores de 120 suman a $2 \times 120 = 240$, y propuso a su amigo Descartes el problema de encontrar más números cuyos factores suman un múltiplo del número original.

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ y sus divisores, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40 y 60 suman $240 = 2 \times 120$.

Si 120 se cuenta entre sus propios factores, entonces la suma es $360 = 3 \times 120$ y por esta razón 120 a veces se llama tri-perfecto, o múltiplo perfecto de orden 3, en cuyo caso los números perfectos ordinarios son de orden 2. ¡Confuso!

Descartes respondió a la sugerencia de Mersenne con una lista de 9 números de múltiplos-perfectos.

Sólo se conocen 6 números tri-perfectos: 120, 672, 523.776, 459.818.240, 1.476.304.896 y 31.001.180.160.

Estos son todos iguales, así como todos los números perfectos conocidos son iguales. Si existe un número impar tres veces perfecto, entonces excede 10^{50}, es un cuadrado, y tiene por lo menos 9 factores primos distintos. Si no es par o divisible por 3, entonces es aún más grande, mayor que 10^{108} con al menos 32 factores primos distintos. Se conocen más de 500 números multiplicadores perfectos, de orden de hasta 8. Es el más pequeño de la orden 8, descubierto por Alan L. Brown, un 'ordenador humano' americano, es: $2 \times 3^{23} \times 5^9 \times 7^{12} \times 11^3 \times 13^3 \times 17^2 \times 19^2 \times 23 \times 29^2 \times 31^2 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 67^2 \times 71^2 \times 73 \times 83 \times 89 \times 103 \times 127 \times 131 \times 149 \times 211 \times 307 \times 331 \times 463 \times 521 \times 683 \times 709 \times 1279 \times 2141 \times 2557 \times 5113 \times 6481 \times 10429 \times 20857 \times 110563 \times 599479 \times 16148168401$. [Guy]

Véase Beck y Najar, *Mathematics of Computation*, 1982, no. 157.

121

Un cuadrado palíndromo de un palíndromo, y un cuadrado perfecto en cualquier base a partir de 3.

$11^3 = 1331$ y $11^4 = 14641$ son también palíndromos.

La conjetura de Brocard: $121 = 5!\ 4\text{-}\ 1 = 11^2$.

Fermat conjeturó correctamente que 121 y 4 son los únicos cuadrados que se convierten en cubos cuando se aumentan en 4.

121 es el único cuadrado que es la suma de las potencias consecutivas de 1: $121 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$.

Cada número mayor de 121 es la suma de primos distintos de la forma $4n + 1$.

125

Un cubo, 5^3, que es la suma de dos cuadrados de dos maneras: $125 = 10^2 + 5^2 = 11^2 + 2^2$.

125 es la parte decimal de 1/8. Debido a que $8 = 10 - 2$, puede escribirse como una suma, similar a las sumas que se relacionan con los decimales periódicos:

```
1 2 4 8
      1 6
        3 2
          6 4
          1 2 8
            2 5 6
              5 1 2
              . . . .
1 2 4 9 9 9 9 9 9 9 9...
```

127

En 1848, de Polignac conjeturó que cada número impar podía expresarse como la suma de una potencia de 2 y un primo. Reclamó una verificación de hasta 3 millones, pero falla en 127, para empezar.

Nigel Boston, *Quarch*, no. 6.

Números de Mersenne

$127 = 2^7 - 1$ es el séptimo número de Mersenne, designado por M_7, y el cuarto primo de Mersenne, y por lo tanto la fuente del cuarto número perfecto.

El Padre Marin Mersenne fue un filósofo natural, teólogo, matemático y teórico musical, y el espíritu movilizador de uno de los grupos científicos franceses más importantes de principios del siglo XVII.

Fue amigo de Descartes, con quien estudió en el colegio jesuita de Desargues, Fermat, Frenicle y los Pascales, padre e hijo, y otros matemáticos, a quienes propuso problemas de números perfectos e ideas afines.

En 1644, en el Prefacio a Cogitata Physico-Mathematica afirmó que los únicos valores de p no mayores de 257 para los cuales $2^p - 1$ es primo son 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257. Mersenne contó 1 como primo. Hoy en día la lista comienza con M_2.

Los primeros cuatro de ellos, que son 3, 7, 31 y 127, son obviamente primos.

M_{13} era conocido por ser primo en la época medieval y M_{17} y M_{19} también eran conocidos por ser primos. Así que Mersenne afirmaba que entre 31 y 257, ambos inclusive, sólo hay cuatro M_p: M_{31}, M_{67}, M_{127} y M_{257}.

Mersenne sabía que M_p debe ser compuesto si p es compuesto, pero lo contrario no es cierto.

(Todos los números de Mersenne son coprimos, por cierto, lo que prueba que el número de primos es infinito, ya que debe haber al menos un primo nuevo por cada número de Mersenne.)

Mersenne estaba haciendo una afirmación sobre todas las potencias principales de 2 hasta 2^{257} inclusive.

Una afirmación muy notable teniendo en cuenta su carencia total de computadoras modernas, y el tamaño de los números más grandes. Fermat ya sabía (1640) que cualquier factor del número de Mersenne M_p debe ser de la forma $2np + 1$, pero esto no elimina un enorme número de posibles grandes factores. Tal vez Fermat confiaba en algún teorema o idea que ahora se ha perdido.

De todos modos, la lista contiene errores, aunque todos ellos fueron descubiertos mucho después de la muerte de Mersenne. De hecho, dos de las cuatro adiciones de Mersenne a la lista son realmente compuestas, y se perdió tres primos.

M_{61} es primo, probado por Pervusin en 1883, y M_{67} es compuesto (67 podría haber sido un error de impresión para 61); M_{89} y M_{107}, que Mersenne omitió, son ambos primos, y M_{257} es compuesto.

Por otro lado, M_{31} es efectivamente primo, y también lo es el gigantesco M_{127}.

La lista de Mersenne, a pesar de o quizás porque era tan ambiciosa y errónea, ha estimulado a los matemáticos a inventar mejores y mejores métodos para resolver uno de los problemas más sencillos de las matemáticas, tan sencillo que cualquier niño que haya aprendido a hacer una larga multiplicación puede entenderlo, pero que los matemáticos sólo pueden resolver parcialmente.

El problema es revertir el resultado de la multiplicación, es decir, tomar un gran número y decidir si es el producto de por lo menos otros dos números, y si es así, encontrarlos. ¡Tan fácil de decir, tan difícil de hacer!

Los números de Mersenne son candidatos ideales incluso para métodos relativamente elementales, porque están construidos de una manera tan simple, como los números de Fermat $2^{2^n} + 1$. Ambos conjuntos de números son sorprendentemente no aleatorios y su estructura proporciona la base para su factorización.

Con el advenimiento de las computadoras modernas, se han descubierto muchos primos de Mersenne mucho más grandes, comenzando con $2^{521} - 1$ en 1952, cada uno llevando a un número perfecto.

Todos los primos de Mersenne conocidos hasta la fecha están listados bajo *28: Números perfectos.*

Ver Gardner, 1971.

128

2^7, y por lo tanto en binario 10.000.000.

El número más pequeño para ser el producto de 7 factores primos.

128 es una potencia de 2, cuyos dígitos son todos potencias de 2. No se sabe si es la única.

128 es el número más grande que no es la suma de cuadrados distintos. [Le Lionnais]

132

132 es la suma de todos los números de 2 dígitos obtenidos combinando sus dígitos: 132 = 13 + 32 + 21 + 31 + 23 + 12.

Es el número más pequeño de esta serie.

133,335

La clasificación Decimal de Dewey para ‘numerología’. Martin Gardner, en *La numerología del Dr. Matrix*, señala que si se invierte, y se suma: 133,335 + 533,331 = 666,666, descubriendo el Número de la Bestia, ¡repetido! ¡Profundamente significativo!

135

$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3$

Otros ejemplos del mismo patrón son: $175 = 1^1 + 7^2 + 5^3$; $518 = 5^1 + 1^2 + 8^3$ y $598 = 5^1 + 9^2 + 8^3$.

136

Sumar los cubos de sus dígitos: $1^3 + 3^3 + 6^3 = 244$. Repita y el número original regresa: $2^3 + 4^3 + 4^3 = 136$.

137

Todos los números suficientemente grandes son la suma de un máximo de 137 séptimas potencias.

139

139 y 149 son los primeros primos consecutivos que difieren en 10.

141

Los números de Cullen son de la forma $n \times 2^n + 1$.

El único número primo de Cullen para n entre 2 y 1000, es $141 \times 2^{141} + 1$.

Por otro lado, los números de la forma $n \times 2^n - 1$ son primos 6 veces por debajo de 100, para n = 2, 3, 6, 30, 75 y 81. [Guy]

144

12^2, una gruesa o una docena de docenas, y por lo tanto ‘100’ en el sistema duodecimal de conteo.

144 es el único número Fibonacci cuadrado, aparte del 1. Además es el 12do número Fibonacci.

Un divisor de un número Fibonacci se denomina apropiado si no divide ningún número Fibonacci más pequeño. Los únicos números de Fibonacci que no poseen un divisor apropiado son 1, 8 y 144.

144 termina en un ‘44’ repetido. Un cuadrado puede terminar en un dígito repetido sólo si es múltiplo de 100, o si la raíz termina en 12, 38, 62 u 88, cuando el cuadrado termina en ‘44’.

Invertir 12 y 144 da $441 = 21^2$.

El cuadrado mágico más pequeño compuesto de primos consecutivos comprende los 144 primos impares de 3 en adelante. La constante mágica es 4515.

Euler conjeturó que ninguna *n*-ésima potencia puede ser la suma de menos de *n* *n*-ésimas potencias. Por ejemplo, un cubo no puede ser la suma de sólo dos cubos, lo cual es cierto. (Es el caso más pequeño del Último Teorema de Fermat.)

En 1966 L.J. Lander y T.R. Parkin buscaban en el ordenador 5 potencias que eran la suma de otras 5 potencias. Para su gran sorpresa, no sólo encontraron 4 soluciones a su problema original, sino también que en una solución, uno de los números era el 0^5, así que de hecho habían descubierto un contraejemplo de la conjetura de Euler: $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$.

Ninguna otra quinta potencia hasta 765^5 puede ser expresada como la suma de sólo 4 quintas potencias, aparte de los múltiplos de 144: 288, 432, 576 y 720.

145

$145 = 1! + 4! + 5!$

Los únicos otros números que son la suma de los factoriales de sus dígitos son 1, 2 y 40585.

El 4to número que es la suma de 2 cuadrados de dos maneras diferentes: $145 = 12^2 + 1^2 = 8^2 + 9^2$.

153

153 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5!

Cuando se añaden los cubos de los dígitos de cualquier número de 3 dígitos que sea múltiplo de 3, y luego se repite este proceso, el resultado final es 153, donde termina el proceso, porque $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$.

Los otros números de 3 dígitos que equivalen a la suma de los cubos de sus propios dígitos son 370, 371 y 407.

Estos pares cambian de uno a otro en un ciclo de 2 ciclos: 136 y 244; 919 y 1459.

Hay dos ciclos de longitud 3: 55-250-133 y 160-217-352. Cuando G. H. Hardy deseaba, en su libro *La disculpa de un matemático*, dar ejemplos de teoremas matemáticos que no eran ‘serios’, escogió dos ejemplos, ‘casi al azar, de *Recreaciones Matemáticas* de Rouse Ball’.

El primero fue el hecho de que 8712 y 9801 son los únicos números de 4 dígitos que son múltiplos de sus inversiones.

El segundo fue el hecho de que, aparte de 1, sólo hay 4 números que son la suma de los cubos de sus dígitos, los mencionados anteriormente. Hardy comentó,

> Estos son hechos extraños, muy adecuados para columnas de rompecabezas y que pueden entretener a los aficionados, pero no hay nada en ellos que atraiga al matemático. Las pruebas no son ni difíciles ni interesantes, sólo un poco tediosas. Los teoremas no son serios; y está claro que una de las razones... es la especialidad extrema tanto de las enunciaciones como de las pruebas, que no son capaces de ninguna generalización significativa.

Como cualquier crítico podría haber comentado sobre la solución de Euler al problema de los Puentes de Königsberg, o sobre la afición de Euler a los Cuadrados Mágicos. La existencia o no de generalizaciones significativas parecería ser un hecho contingente, no susceptible de ser probado por G. H. Hardy.

Como un hecho casi seguramente menos interesante, yo sugeriría, ‘El 10.000.000 dígito de π es un 7,’ mencionado por Keith Devlin, aunque la supuesta falta de interés en este hecho sigue siendo un hecho contingente, y nada más.

En el Nuevo Testamento, la red que Simón Pedro sacó del mar de Tiberíades contenía 153 peces. Esto fue inevitablemente interpretado numéricamente por los primeros padres de la Iglesia, especialmente por San Agustín.

153 es el 17mo número triangular y, por lo tanto, ya es significativo. Pero, ¿qué tiene de especial el 17 en sí mismo? Es la suma de 10 para los Diez Mandamientos del Antiguo Testamento a 7, para los Dones del Espíritu en el Nuevo Testamento.

Esta fue una forma común de combinar dos influencias, al igual que los pitagóricos asociaron el 5 con el matrimonio porque el 5 = 2 + 3 y esos números son femeninos y masculinos respectivamente.

W. E. Bowman, un escritor moderno con más humor y menos reverencia, introduce el número 153 en numerosas ocasiones en su novela *The Ascent of Rum Doodle*. Aparece como la altura del barco sobre el nivel del mar, la velocidad de un tren que atraviesa las estribaciones del Himalaya, el número de porteadores que hay que contratar para el ascenso, y la profundidad de una grieta, entre otras cosas.

154

154! + 1 es primo.

159

159 no puede ser representada como la suma de menos de 19 cuartas potencias.

161

Cada número mayor de 161 es la suma de los distintos primos de la forma $6n - 1$.

163

Aitken compitió con éxito con Wim Klein, un prodigio holandés que había memorizado la tabla de multiplicar hasta 100 × 100 pero que carecía de los conocimientos matemáticos para emplear atajos inteligentes. Aitken a menudo hacía cálculos subconscientes. Contó de los resultados que ‘surgieron de la oscuridad’, y diría de un número en particular que ‘se siente primo’ como de hecho lo fue. Era uno de los pocos para los que los enteros eran amigos personales. Notó, por ejemplo, una divertida propiedad de 163: que $e^{\pi\sqrt{163}}$ difiere de un entero en menos de 10^{-12}. Como él mismo dijo una vez, ‘La familiaridad con los números, adquirida por la facultad innata y agudizada por la práctica asidua, nos da una idea de los teoremas fundamentales del álgebra y el análisis’.

Ball y Coxeter, 1974.

169

$169 = 13^2$ y $961 = 31^2$

175

$175 = 1^1 + 7^2 + 5^3$

180

El número de grados en un semicírculo y el número de grados Fahrenheit entre el punto de congelación del agua, 32, y su punto de ebullición, 212.

La suma de los ángulos de un triángulo.

180^3 es la suma de cubos consecutivos: $180^3 = 6^3 + 7^3 + 8^3 + ... + 68^3 + 69^3$. [Beiler]

187

El más pequeño de un grupo de números de 3 dígitos que requieren 23 inversiones para formar un palíndromo.

196

$196 = 14^2$ tiene los mismos dígitos que $169 = 13^2$.

Palíndromos por inversión

Si 87 se invierte y se añade a sí mismo, y el proceso se repite, entonces después de sólo cuatro pasos produce un palíndromo, 4884: 87 + 78 = 165: 165 + 561 = 726: 726 + 627 = 1353: 1353 + 3531 = 4884.

Esto es efectivamente una declaración sobre el tamaño de los dígitos en el paso anterior. Para obtener un palíndromo basta con que en la adición anterior no haya acarreos y, por lo tanto, que los dígitos de la etapa anterior, tomados de dos en dos desde ambos extremos, sumen 9 o menos.

¿Todos los números se convierten en palíndromos con el tiempo? La respuesta a este problema es desconocida. 196 es el único número menos de 10.000 que por este proceso todavía no ha producido un palíndromo. P. C. Leyland ha realizado 50.000 inversiones, produciendo un número de más de 26.000 dígitos sin que aparezca ningún palíndromo, y P. Anderton ha llevado esto hasta 70.928 dígitos, también sin éxito.

De los 900 números de 3 dígitos, 90 son palíndromos, 735 requieren de 1 a 5 inversiones solamente.

Los 75 números restantes pueden clasificarse en unos pocos grupos, cuyos miembros, después de una o dos inversiones, producen cada uno el mismo número y, por lo tanto, son esencialmente los mismos. Uno de estos grupos consiste en los números 187, 286, 385, 583, 682, 781, 869, 880 y 968, cada uno de los cuales cuando se invierten una o dos veces forman 1837 y eventualmente forman el número palíndromo 8813200023188 después de 23 reversiones. [Richard Hamilton]

Entre los primeros 100.000 números hay 5.996 que se ha descubierto que no crean un palíndromo. Dado que la probabilidad de que un número escogido al azar tenga dígitos que al ser emparejado desde los extremos siempre suman 9 o menos disminuye claramente con la longitud del número, es plausible suponer que cuanto mayor sea el número, menor será la probabilidad de que aparezca un palíndromo.

En la base 2, ciertamente no es cierto que cada número genere eventualmente un palíndromo. Roland Sprague muestra que 10110 nunca lo hace.

199

199 + 210*n* para *n* = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 proporciona los 8, 9 y 10 primos más pequeños en progresión aritmética.

204

204^2 es la suma de cubos consecutivos: $204^2 = 23^3 + 24^3 + 25^3$.

205

Cada número mayor de 205 es la suma de distintos primos de la forma 6*n* + 1.

210

primorial 7 = 2 × 3 × 5 × 7

210 es triangular y pentagonal. El número más pequeño es, como de costumbre, 1, y el siguiente más pequeño es 40.755.

212

El punto de ebullición del agua en grados Fahrenheit.

216

$216 = 6^3$ es el cubo más pequeño que es también la suma de 3 cubos: $216 = 3^3 + 4^3 + 5^3$. El siguiente más pequeño es $9^3 = l^3 + 6^3 + 8^3$.

Esta disección puede ser demostrada físicamente diseccionando un cubo, usando sólo 8 piezas.

216 es la constante mágica en el cuadrado mágico multiplicativo más pequeño posible, descubierto por Dudeney.

Número de Platón

El famoso y notorio número de Platón ocurre en un oscuro pasaje de *La República*, viii, 546 B-D, que comienza,

> Pero el número de una criatura humana es el primer número en el que la raíz y el cuadrado aumentan, habiendo recibido tres distancias y cuatro límites, de elementos que hacen a la vez semejantes y diferentes y que se agrandan y decaen, hacen que todas las cosas sean convertibles y racionales entre sí.

Esto es simplemente el comienzo del pasaje. Ilustra perfectamente tanto la relación íntima que Platón, como pitagórico, percibía entre los números y el mundo real, como la dificultad que tenía para utilizar el lenguaje entonces disponible para expresarse. El lenguaje matemático no estaba bien desarrollado en la época de Platón, por lo que aparentemente recurría a menudo a los recursos del lenguaje cotidiano. Digo 'aparentemente' porque algunas palabras del pasaje apenas se conocen en otros escritos conservados y, por lo tanto, su significado es especialmente difícil de interpretar. (La oscuridad no se debe enteramente a nuestra distancia de Platón en el tiempo. Los primeros comentaristas griegos también encontraron el pasaje difícil.)

Todo el pasaje ha sido analizado hasta el más mínimo detalle por innumerables comentaristas. En realidad se trata de dos números y el menor establecido es 216, aunque esto se deriva de diversas maneras. (El mayor es 12.960.000.)

El conocido triángulo pitagórico 3-4-5 tiene área 6. La expresión 'tres distancias y cuatro límites' se supone que se refiere al cubo. Adams finalmente llega a la conclusión de que el número previsto en el pasaje citado es 216 como la suma de los cubos de los lados del triángulo. Sin embargo, también se ha deducido como el cubo de 2 × 3.

2 y 3 se asociaron con mujeres y hombres respectivamente, y 5 con el matrimonio. 6 también se asoció con el matrimonio, siendo 2 × 3 en lugar de 2 + 3. Dada la creencia básica de los pitagóricos en la eficacia de los números en la interpretación del mundo, es difícil negar que relaciones tan teóricas como ésta apoyan su enfoque.

J. Adams, *La República de Platón*, Cambridge University Press, Cambridge, 1929.

217

El segundo seudoprimo más pequeño hasta la base 4 (15 es el más pequeño).

$4^{216} - 1$ es divisible por 217 aunque 217 no es primo sino 7 × 31.

219

Hay 219 grupos espaciales en 3 dimensiones. Son los análogos de los 17 diseños básicos de tapices en 2 dimensiones, y determinan las posibles formas de los cristales minerales.

11 de ellos, sin embargo, vienen en 2 formas, con un giro a la izquierda o a la derecha. Esta diferencia es importante en la estructura y propiedades ópticas de los cristales, por lo que desde este punto de vista hay 230 grupos espaciales.

220

Números amigables

220 y 284 forman la primera y más pequeño par amigable. Cada uno es la suma de los divisores propios del otro: $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ y sus divisores propios son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110: total 284.

$284 = 2^2 \times 71$ y sus divisores propios son 1, 2, 4, 71 and 142, totalizando 220.

Según Iamblichus, Pitágoras conocía esta pareja. Sin embargo, Pitágoras posiblemente no sea el único hombre sabio de la antigüedad que conoce los números amigables. Los comentaristas de la Biblia señalan el regalo de Jacob de 220 cabras a Esaú en su reunión… ¿un regalo amigable?

El brillante matemático, astrónomo y médico musulmán Thabit ibn Qurra describió en su *Libro sobre la Determinación de Números Amigables* la regla de Euclides para los números perfectos, los medios para construir números abundantes y deficientes, y la primera regla para construir números amigables, de la cual dedujo el par de Pitágoras, o quizás más probablemente, los factores de 220 y 284 sugirieron la forma de su regla:

Encuentra un número, n, mayor que 1, que haga que estas tres expresiones sean todas primos:

$$a = 3 \times 2^n - 1 \qquad b = 3 \times 2^{n-1} - 1 \qquad c = 9 \times 2^{2n-1} - 1.$$

Entonces el par $2^n \times a \times b$ y $2^n \times c$ será amigable.

El más pequeño de cualquier par de Thabit es un número tetraédrico. 220 es el décimo tetraedro. Lee y Madachy sugieren que puede ser significativo que el primer número perfecto, 6, sea igual a $1 \times 2 \times 3$; el más pequeño múltiplo perfecto, 120, es $4 \times 5 \times 6$ y la suma de 220 y 284 es $504 = 7 \times 8 \times 9$. Ellos comentan que se sabe que los babilonios han construido las tablas de los productos de 3 números consecutivos, que son sólo 6 veces los números tetraédricos.

Hay una similitud obvia con la regla de Euclides para números perfectos. Sin embargo, la regla de Thabit no da todos los pares amigables. De hecho, es uno de varios patrones similares que generan pares amigables. También es muy difícil de usar, porque implica hacer 3 expresiones primas simultáneamente. Thabit ibn Qurra no encontró ninguna pareja nueva. De hecho, su regla funciona para n = 2, 4 y 7, pero no para otros valores inferiores a 20.000.

La segunda pareja, 17.296 y 18.416, fue descubierta por otro árabe, Ibn al-Banna. Es la regla de Thabit para $n = 4$. Esta pareja fue redescubierta en 1636 por Fermat, que también redescubrió el dominio de Thabit, al igual que Descartes, que produjo una tercera pareja, 9.363.584 y 9.437.056, dos años más tarde. Esta es la fórmula de Thabit para $n = 7$.

Euler fue el primer matemático que exploró con éxito los números amigables y encontró muchos ejemplos, más de 60. Sus métodos siguen siendo la base de la exploración actual.

Ahora se conocen más de mil pares de números amigables, incluyendo todos los pares posibles en los que el número más pequeño es menor a un millón.

La más grande, descubierta por te Riele, es la pareja: $3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19} \times 29 \times 89(2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1)$ y $3^4 \times 5 \times 11 \times 5281^{19}(2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 1291 \times 5281^{19} - 1)$, cada uno de 152 dígitos.

Los métodos de te Riele también le permiten generar nuevos pares amistosos a partir de los antiguos. Aplicado a una muestra de parejas amistosas, obtuvo más de una ‘pareja hija’ por ‘pareja madre’, lo que sugiere que quizás el número de parejas amistosas es infinito.

Claramente el miembro mayor de una pareja amistosa es deficiente. Además, ninguno de los miembros de un dúo par-impar es divisible por 3.

En todos los casos, los números de un dúo son ambos pares o ambos impares, aunque no se conoce ninguna razón por la que no deba existir un dúo par-impar.

Cada pareja también tiene un factor común. No se sabe si existe un dúo de números amigables coprimos. Si esto ocurre, incluso en el caso más favorable, en el que su producto es divisible por 15, el propio producto debe ser superior a 1067. Si lo hacen, por supuesto que no se construirán según el patrón de Thabit, o cualquier otro patrón similar.

Los números en cada dúo conocido son también múltiplos de 3, por lo que numerosos matemáticos han conjeturado naturalmente que esta es una regla general.

En 1968 Martin Gardner notó que la suma de cada par era divisible por 9 y naturalmente conjeturó que esto también lo era siempre. No es así, pero los contraejemplos son bastante raros; Elvin Lee dio el ejemplo 666030256, 696630544, originalmente descubierto por Poulet.

La mayoría de los números amigables tienen muchos factores diferentes. ¿Es posible que una potencia de un primo, p^n sea un de un par amigable? Si lo es, entonces p^n es mayor que 10^{1500} y n es mayor que 1400.

Una generalización de los pares amigables son los trillizos amigables, en los que los divisores propios de un número se suman a la suma de los otros dos. Beiler da este ejemplo: $2^5 \times 3 \times 13 \times 293 \times 337$; $2^5 \times 3 \times 5 \times 13 \times 16561$; $2^5 \times 3 \times 13 \times 99371$.

E. J. Lee y J. Madachy, The History and Discovery of Amicable Numbers', partes 1 y 2, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 5.

232

232, 233 y 234 es el trío más pequeño de números consecutivos, cada uno de los cuales es la suma de 2 cuadrados, y por lo tanto la hipotenusa de un triángulo pitagórico:

$232 = 6^2 + 14^2$ $233 = 8^2 + 13^2$ $234 = 3^2 + 15^2$

No es posible tener 4 números consecutivos.

239

$239 = 2 \times 4^3 + 4 \times 3^3 + 3 \times 1^3$

Junto con 23, los únicos números que no pueden ser representados en menos de 9 cubos. También necesita 19 cuartas potencias para representarlo.

240

Ningún número inferior a 1.000.000 puede tener más de 240 divisores. 5 números tienen esta cantidad:

$720720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$
$831600 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 11$
$942480 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17$
$982800 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 \times 13$
$997920 = 2^5 \times 3^4 \times 5 \times 7 \times 11$

242

Los números 242, 243, 244 y 245 tienen 6 divisores cada uno.

243

$243 = 3^5$, y por lo tanto 100.000 en base 3.

251

El número más pequeño que es la suma de 3 cubos diferentes de dos maneras: $251 = 1^3 + 5^3 + 5^3 = 2^3 + 3^3 + 6^3$.

256

$256 = 2^8$ o 1.000.000 en binario y 100 en hexadecimal.

257

$257 = 4^4 + 1$ y es primo. Los únicos primos conocidos de la forma $n^n + 1$ son cuando $n = 1$, 2 y 4. Se ha demostrado que si hay otros primos de esta forma, deben tener más de 300.000 dígitos. [Madachy]

Números de Fermat

257 es el tercer número de Fermat, igual a $2^{2^3} + 1$.

Fermat en 1640, escribiendo a Frenicle, declaró que $2^n + 1$ es compuesto si n es divisible por un número impar, y luego afirmó que cada número $F_n = 2^{2^n} + 1$ es primo, aunque no pudo probar esto.

Luego le envió el problema a Pascal, comentando: ‘No te pediría que trabajaras en ello si hubiera tenido éxito’. Pascal no lo aceptó y fue Euler quien primero demostró que Fermat estaba equivocado.

Los primeros 4 valores, empezando por F_0, son primos: $F_0 = 2^1 + 1 = 3$; $F_1 = 2^2 + 1 = 5$; $F_2 = 2^4 + 1 = 17$; $F_3 = 2^8 + 1 = 257$, y no es difícil demostrar que $F_4 = 2^{16} + 1 = 65.537$ es primo, pero el desafío a partir de ese momento el problema se vuelve mucho más difícil, debido a que los números aumentan de tamaño de una manera vertiginosa, más rápidamente que ninguna de las secuencias estudiadas con anterioridad por matemáticos.

Fermat resultó estar equivocado, la única ocasión en la que se sabe que se equivocó en sus conjeturas, aunque es posible que su Último Teorema finalmente resulte ser falso.

Euler, en 1732, mostró que $F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6700417$. En 1747 demostró que cualquier factor de un número de Fermat F_n es de la forma $k \times 2^{n+1} + 1$, lo que lleva muy rápidamente a la misma factorización de F_5. También encontró el mismo factor usando notación binaria, uno de los primeros usos de los números binarios en una prueba matemática.

Más de un siglo después, en 1880, F. Landry, que factorizó muchos números de las formas $2^n + 1$ y $2^n - 1$, mostró que $F_6 = 2^{64} + 1$ es el producto de 2 primos: 274177 y 67280421310721.

Sin embargo, Pervusin ya había descubierto que F_{12} es divisible por $7 \times 2^{14} + 1 = 114689$. Los números de Fermat, como los de Mersenne, se habían convertido en un campo de pruebas ideal para las pruebas de primalidad y los métodos de factorización.

Vale la pena comentar que el problema de factorizar un número casi con toda seguridad tiene la distinción única de ser el problema más fácilmente expresable y muy difícil en todas las matemáticas. Un niño puede multiplicar pequeños números juntos, o grandes números con paciencia y cuidado, y el problema inverso es perfectamente obvio en principio, pero extraordinariamente difícil en la práctica.

John Brillhart, quien ha hecho una distinguida contribución al tema, cita a Gauss, en *Disquisitiones Arithmeticae:*

El problema de distinguir los números primos de los números compuestos y de resolver estos últimos en sus factores primos es conocido por ser uno de los más importantes y útiles en aritmética. Se ha comprometido con la industria y la sabiduría de los geómetras antiguos y modernos hasta tal punto... La dignidad de la ciencia misma parece requerir que se exploren todos los medios posibles para la solución de un problema tan elegante y celebrado.

Para volver a Fermat, ya parecía plausible que él estaba, desafortunadamente, totalmente equivocado, que no hay números primos de Fermat más allá de F_4. Idealmente, los matemáticos buscaban una factorización completa en los primos, pero a menudo tenían que conformarse, al menos inicialmente, con encontrar un factor, o probar que una F_n en particular era compuesta, sin producir realmente ningún factor en absoluto.

Así, en 1909, Moorhead y Western demostraron que F_7 y F_8 son compuestos, sin producir ningún factor. Tales pruebas se realizan fácilmente hoy en día en computadoras usando este criterio, que es similar a la prueba de Lucas para la primalidad de los números de Mersenne:

F_n es primo si y sólo si divide $3^{1/2(F_n-1)}+1$.

El problema de F_7, que tiene 39 dígitos, ilustra muy bien la diferencia entre usar tal prueba y encontrar realmente un factor. No fue hasta 1970 que Morrison y Brillhart encontraron sus dos factores principales: $F_7 = (2^9 \times 116503103764643 + 1)(2^9 \times 11141971095088142685 + 1)$.

En contraste, se conoce un factor del gigante F_{1945}, y más recientemente, en 1980, se anunció que $19 \times 2^{9450} + 1$ es un factor de F_{9448}. Como señala Coxeter, F_{1945} nunca pudo ser escrito porque el número de dígitos ¡excede con creces la estimación de Eddington sobre el número de partículas en el universo entero! ¿Qué tan grande es F_{9448}? Sin embargo, se puede definir —como se ha hecho— utilizando sólo 5 símbolos.

Los números de Fermat son ahora conocidos por ser compuestos para todos los *n* de 5 a 19 inclusive y para muchos valores mayores de *n*, aunque sólo F_5, F_6, F_7 y F_8 han sido completamente factorizados.

F_8 fue finalmente conquistada en 1981 cuando Brent y Pollard encontraron el factor principal, 1.238.926.361.552.897, para lo cual sugirieron la mnemotécnica.[34] El truco práctico remite al uso del método de Monte

[34] *I am now entirely persuaded to employ the method, a handy trick, on gigantic composite*

Carlo, que, como su nombre indica, utiliza una versión sofisticada de lanzar dados para descubrir el factor que falta. ¡Qué encantador cuando se utiliza el azar para encontrar un número muy definido!

Sólo se conoce un factor del siguiente, F_9, el que fue encontrado en 1903 por Western, y para muchos valores no se ha descubierto ningún factor en absoluto.

Los números de Fermat tienen otras propiedades, además de ser aparentemente casi todos compuestos.

$F_{n+1} = F_0F_1F_2 \ldots F_{n-1} + 2$, de lo cual se deduce que 2 números Fermat sólo pueden tener un factor común de 2, lo que es imposible. Por lo tanto, todos son coprimos, lo que prueba que hay un número infinito de primos.

Ningún 'F' es triangular, excepto $F_0 = 3$, y ningún número de Fermat es un cuadrado o un cubo.

Gauss demostró que un polígono regular con un número primo de lados puede ser construido sólo si ese número es un primo de Fermat. Paucker dio las ecuaciones para construir un 257-gono regular en 1822.

265

Subfactorial de 6

276

Secuencias de alícuotas

En una cadena sociable, la suma de los divisores de cada número, excluyéndose a sí mismo, lleva al siguiente número, y así sucesivamente, eventualmente regresando al número inicial.

¿Qué sucede si se toma un número arbitrario y se calcula la suma de sus divisores, y luego la suma de los divisores del resultado, y así sucesivamente?

Esta secuencia se denomina secuencia de alícuota. Algunas secuencias de alícuotas pueden aumentar, en promedio, para siempre. Algunas entrarán en una cadena sociable y girarán para siempre. De hecho, cada

---

numbers.

cadena sociable conocida es el final de una secuencia de alícuota. Curiosamente, muchas secuencias de alícuotas terminan en la pareja amigable de Paganini 1184, 1210.

Catalan y luego Dickson conjeturaron que todas esas secuencias están limitadas, aunque, según Guy, los argumentos heurísticos y las pruebas experimentales sugieren que algunas secuencias, quizás casi todas las que comienzan con un número par, llegan al infinito.

te Riele ha producido una secuencia de este tipo que aumenta durante más de los primeros 5000 términos.

276 es un caso de prueba para la conjetura. Es el número más pequeño cuyo destino final se desconoce desde que D. N. Lehmer mostró que 138, después de subir a 17.99318.95322 después de 117 pasos, llega a 1 después de 177 pasos. Lehmer y otros han demostrado que 276 después de 469 pasos ha producido el número de 45 dígitos, 149.384.846.598.254.844.243.905.695.992.651.412.919.855.640.

¿Qué pasa ‘al final’? Nadie lo sabe.

284

Con 220, el primer par de números amigables.

297

Números de Kaprekar

El quinto número de Kaprekar. Cuando un número Kaprekar de n-dígitos es cuadrado y los n dígitos de la derecha se suman a los n o $n - 1$ dígitos de la izquierda, el resultado es el número original: $297^2 = 88209$ y $88 + 209 = 297$.

Los primeros números de Kaprekar son 1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 7272, 7777...

Tenga en cuenta que $1 + 9 = 10$, $45 + 55 = 100$ y así sucesivamente.

142857 es Kaprekar. También 1.111.111.111, el número Kaprekar más pequeño de 10 dígitos cuyo cuadrado es 1234567890098765432 1.

Si una permutación cíclica de un número de Kaprekar es un cuadrado y se suman las 'mitades', el resultado es una permutación cíclica del número original. Por ejemplo, 972 es una permutación cíclica de 297. $972^2 = 944784$ y 784 + 944 = 1728.

El proceso de 'añadir mitades' ahora debe completarse añadiendo 1 a 728. El resultado, 729, es otra permutación cíclica diferente de 297.

De manera similar, 7272 es Kaprekar; su única permutación cíclica distinta es 2727: $2727^2 = 7436529$ y 743 + 6529 = 7272.

297 es también un Kaprekar 'triple', porque 2973 = 026.198.073 y 026 + 198 + 073 también es igual a 297.

Los números de Kaprekar están relacionados con los repunits. Si el número X de *n*-dígitos es Kaprekar, entonces $X^2 – X$ es un múltiplo del repunit $10^n – 1$ de *n*-dígitos.

306

R. William Gosper, deseando elegir un número más o menos al azar como prueba para un nuevo método de cálculo de raíces basado en fracciones continuas, escogió 306 y calculó su séptima raíz a 2.800 dígitos. Comienza, 2,26518...

F. Gruenberger, 'Computer Recreations', *Scientific American*, abril de 1984.

319

319 no puede ser representada como la suma de menos de 19 cuartas potencias.

325

325 = 5 × 5 × 13 es el número más pequeño que es la suma de dos cuadrados de tres maneras diferentes: $1^2 + 18^2$, $6^2 + 17^2$ y $10^2 + 15^2$.

331

Dado cualquier número M, hay una potencia de dos, digamos 2^n, de modo que $M - 2^n$ o $M + 2^n$ sólo tiene factores primos mayores o iguales a 331.

F. Cohen and J. L. Selfridge, 'Not Every Number is the Sum or Difference of Two Prime Powers', *Mathematics of Computation*, vol. 29.

341

$341 = 11 \times 31$ es el seudoprimo más pequeño con base 2.

Es decir, $2^{340} - 1$ es divisible por 341, aunque 341 es compuesto y no primo.

Los antiguos chinos creían que si n divide $2^{n-1} - 1$, entonces n es primo. Lo mismo hizo Leibniz, pero no es así, como Pierre Sarrus señaló primero.

Los seudoprimos son bastante raros. Hay 882.206.716 primos menores de 20.000.000.000 En el mismo rango Selfridge y Wagstaff calculan que sólo hay 19.865 seudoprimos en base 2.

C. Pomerance, 'The Search for Prime Numbers', *Scientific American*, diciembre de 1982.

353

353^4 es la cuarta potencia más pequeña que es la suma de otras 4 cuartas potencias, descubierta por Norrie en 1911: $353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$.

360

El número de grados en un círculo completo. El Zodíaco fue dividido primero en 360, sin duda por la división de cada uno de los 12 signos en 30 partes iguales.

El astrónomo griego Hiparco dividió primero un círculo general en 360 grados.

Aproximadamente el número de días en un año, dividido aproximadamente en 12 meses de 30 días cada uno.

365,2422

El calendario

El número aproximado de días del año, equivalente a 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46,08 segundos.

Este es el tiempo que le toma a la tierra hacer una revolución alrededor del sol. Cada civilización lo ha relacionado con el período de las fases de la luna, por ejemplo, el tiempo entre dos lunas nuevas, que es aproximadamente 29,530588 días, o 29 días 12 horas 44 minutos y 2,8 segundos.

Desafortunadamente, la relación no es muy simple. Es una coincidencia que la duración del año en días sea tan cercana al número redondo, 360, que resulta ser muy cercano a 12 veces el período de la luna.

Tales coincidencias son útiles, pero no suficientes, y se ha dedicado un inmenso ingenio a explicar las diferencias.

En el calendario juliano los años ordinarios tienen 365 días, pero cada año cuyo número es divisible por 4 tiene un día extra, el 29 de febrero, lo que hace un total de 366 días. El año juliano promedio tiene por lo tanto 365,25 días y es un día más aproximadamente cada 128 años.

El calendario gregoriano, que se utiliza hoy en día en la mayor parte del mundo, es una pequeña pero significativa mejora del juliano. Todos los años divisibles por 100 son años ordinarios, no años bisiestos, con la excepción de los años divisibles por 400, que siguen siendo años bisiestos. El calendario gregoriano contiene un día de más cada 3.333 años, y por lo tanto no requerirá ajustes hasta mucho después de que todos estemos muertos.

En la Unión Soviética, sin embargo, utilizan un calendario aún más preciso, introducido en octubre de 1923. Todos los años son ordinarios, excepto los que, divididos por 9, dejan 2 o 6 como resto. Este calendario contiene un día de más después de 45.000 años.

Los calendarios juliano y gregoriano se basan en la duración del año y por lo tanto en el sol. Dado cualquier día del año, podemos decir con bastante precisión la posición del sol en el cielo, pero no la posición de la luna.

El calendario musulmán, en cambio, da prioridad a la luna. Tiene 12 meses de 30 y 29 días alternos. En un año bisiesto, el último mes tiene un día extra. El año ordinario tiene sólo 354 días y un año bisiesto 355 días, por lo que el comienzo del año musulmán se mueve constantemente a través del año gregoriano, y viceversa.

El año judío es una combinación de años solares y lunares. El año de base es un año lunar de 12 meses que son alternativamente de 30 y 29 días, pero cuando el error es de un mes completo, se inserta un mes 13 en ese año. Esto lo convierte en el más complicado de todos los calendarios.

Las complicaciones que se introducen cuando el año solar y el mes lunar se consideran juntos están bien ilustradas por la manera en que la fecha de Pascua, que depende de la posición de la luna, salta alrededor del año cristiano. El gran Karl Friedrich Gauss demostró su comprensión de los números construyendo fórmulas sencillas para calcular la fecha de la fiesta cristiana de Pascua, y también, lo que es aún más difícil, la fecha de la fiesta judía de la Pascua.

W. A. Schocken, *The Calculated Confusion of Calendars*, Vantage Press, New York, 1976.

370

Como 371 y 153, igual a la suma de los cubos de sus dígitos.

371

371 es igual a la suma de los cubos de sus dígitos.

399

El 399 necesita 19 cuartas potencias para representarlo.

400

$400 = 20^2 = 1 + 7 + 7^2 + 7^3$

En otras palabras, la suma de los divisores de 73 es un cuadrado. La suma de los divisores de 400 es también un cuadrado: $961 = 31^2$.

400 es también el producto de todos los divisores propios de 20.

407

$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$

462

El segundo número más pequeño cuyo cuadrado termina en las cifras 444: $462^2 = 213444$.

484

$484 = 22^2$

Es el cuadrado palíndromo de una raíz cuadrada palíndroma.

492

492 es la suma de 3 cubos, uno o dos de los cuales pueden ser negativos, en no menos de 10 maneras. [Madachy]

495

Tome cualquier número de 3 dígitos cuyos dígitos no sean todos iguales. Ordene sus dígitos en orden ascendente y descendente y reste. Repito. Esto se llama proceso de Kaprekar.

Todos los números de 3 dígitos terminan con 495, y se quedan ahí, ya que 954 – 459 = 495.

496

El tercer número perfecto. $496 = 16 \times 31 = 2^4(2^5 - 1)$ es igual a la suma de todos sus divisores propios, 1 + 2 + 4 + 8+ 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.

Thomas Greenwood notó que 1 más que un par o 2 menos que un número triangular impar cuyo índice es primo es a menudo un número primo. $T_{31} = 496$, el 31º número triangular, es el primer contraejemplo. 31 es primo, pero 497 es divisible por 7.

499

$499 = 497 + 2$ y $497 \times 2 = 994$, su inversión.

500

Identificado por la letra D en números romanos.

504

504 es igual a 12×42 y 21×24.

Hay trece de estos pares de dos dígitos, siendo el más grande $36 \times 84 = 63 \times 48 = 3024$.

512

$512 = 2^9$

Es por lo tanto, 1.000.000.000 en binario y 1.000 en octal.

512,73

Numerología

512,73 es la clasificación Decimal de Dewey, bajo la clase general ‘510 matemáticas’ para ‘teoría de números: analítica’.

Cuando Martin Gardner escribió *The Numerology of Dr Matrix*, la clasificación de Dewey para la ‘teoría de números’ era, como él mismo señaló, 512,81, cuyas dos mitades son respectivamente 2^9 y 9^2.

Sin duda, debido a que esta pieza trivial de la numerología ha sido descubierta, las autoridades han cambiado la ‘teoría de números’ a 512,7 y han dado este nuevo número, 512,73, a la teoría analítica de números, cuya primera clasificación es, significativamente, números trascendentales. Ahora voy a iluminar el profundo significado del 512,73 para el beneficio de los no iniciados.

Primero, lo restaré del 666, el Número de la Bestia en el Libro del Apocalipsis: 666 – 512,73 = 153,27.

¡He aquí! Los mismos dígitos aparecen, pero reordenados, simbolizando el efecto de eliminar el mal del mundo. El primer número es ahora 153, el número de peces sacados del mar por Pedro, que fue tan elocuentemente interpretado por san Agustín. El segundo número es ahora el sagrado número 3, elevado a su propio poder. 153 también está asociado con el sagrado 3. No sólo su suma de dígitos es igual a 9, que es 3 veces sí mismo, sino que es la suma del 3er poder de sus propios dígitos. El significado de 3 aparece en el sistema decimal de Dewey. Divida el Número de la Bestia por 3, y obtendrá 222, la clasificación del Antiguo Testamento. Agregue 3, y obtendrá 225, el Nuevo Testamento. Suma 3 de nuevo, y obtienes 228, que es el Libro de Apocalipsis.

Y así sucesivamente, y así sucesivamente, y así sucesivamente, y así sucesivamente...

Confío en que esto ilustre cómo una hora de tejemanejes con una selección de números (escoge los que quieras, ignora el resto) sacará del sombrero cualquier número que desees...

527

Para cualquier número n, es posible elegir un máximo de 6 números menores que n de manera que el producto de sus factoriales sea un cuadrado.

527 es el número más pequeño que realmente requiere el máximo de 6 números para ser elegido. [Le Lionnais]

559

Este es el mayor número menor de 4100 que requiere 19 cuartas potencias para su representación.

561

$561 = 3 \times 11 \times 17$ es el número de Carmichael más pequeño, también llamado seudoprimo absoluto, lo que significa que es un seudoprimo para cualquier base.

En otras palabras, $a^{560} - 1$ es divisible por 561, cualquiera que sea el valor de a.

R.D. Carmichael demostró en 1912 que cada número de Carmichael es el producto de al menos 3 primos impares. Ahora se sabe que n es un número de Carmichael si y sólo si es el producto de al menos 3 primos impares diferentes, p_1, p_2, p_3 … y para cada uno de estos factores $n - 1$ es divisible por $pi - 1$.

Es ampliamente creído, pero no probado, que hay un número infinito de números de Carmichael, aunque son raros.

La secuencia de números de Carmichael continúa, 1105 1729 2465 2821 6601 8911 10585...

563

Según el teorema de Wilson, $(p - 1)! + 1$ es divisible por p si y sólo si p es primo. Muy ocasionalmente, también es divisible por p^2. Los únicos valores inferiores a 200183 son 5, 13 y 563. [Beiler]

567

$567^2 = 321489$

Esta ecuación utiliza cada uno de los dígitos del 1 al 9, una vez cada uno.

El único otro número con esta propiedad es el 854.

587

El comienzo de una secuencia de 11 primos, formada por triplicar cada número a su vez y sumar 16.[35]

587 1777 5347 16057 48187 144577 433747 1301257 3903787 11711377 35134147

593

Wilhelm Fliess, amigo y corresponsal de Sigmund Freud, creía que casi cualquier fenómeno en el mundo podría explicarse por las combinaciones de los números 23 y 28.

Si hubiera sido un mejor matemático, se habría dado cuenta de que todos menos un conjunto finito de números puede ser representado en la forma $23n + 28m$, n y m ambos positivos. $593 = 23 \times 28 - 23 - 28$ resulta ser el número más grande que no puede ser representado.

---

[35] *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 13.

No hay nada especial en la elección de 23 y 28. Se pueden elegir dos números cualquiera que no tengan un factor común.

625

$625 = 5^4$

Porque 625^2 termina en los mismos dígitos, 390625, cualquier potencia de 625 termina en los mismos dígitos.

$5^4 = 2^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 4^4$ es la 4ta potencia más pequeña que es la suma de otras 5 cuartas potencias.

641

Euler encontró el primer contraejemplo de la conjetura de Fermat de que $2^{2^n} + 1$ es siempre primo, cuando descubrió en 1742 que $2^{2^5} + 1$ es divisible por 641.

Todos los factores de $2^{2^n} + 1$ son de la forma $k \times 2^{n+1} + 1$. En este caso, $641 = 10 \times 2^6 + 1$.

645

El segundo seudoprimo más pequeño en la base 2: $2^{644} - 1$ es divisible por 645 ya que $645 = 3 \times 5 \times 43$ es compuesto.

651

$651^4 = 240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4$ es la segunda solución más pequeña, después de 353^4, para una 4ta potencia como la suma de otras 4 cuartas potencias.

651 tiene la inusual propiedad de que 651×156 es igual a otro producto del mismo patrón, 372×273.

A. A. K. Iyangar, *Scripta Mathematical* 1939.

666

El 36to número triangular ($666 = \frac{1}{2} \times 36 \times 37$) y el Número de la Bestia en el Libro del Apocalipsis: ‘Aquí está la sabiduría. El que tiene entendimiento, que cuente el número de la bestia; porque es el número de un hombre, y su número es seiscientos, tres veintenas y seis’.

Un número amado por los ocultistas, que a través de los siglos han utilizado la gematría para encontrar el Número de la Bestia en nombre de sus enemigos, políticos o teológicos.

El hecho de que algunas autoridades antiguas den el número 616 no los ha disuadido. Con un poco de ingenio, se pueden encontrar ambos números en lugar de uno solo.

Peter Bungus hizo a Lutero igual a 666, usando el viejo sistema, que cuenta A-I como 1-9, K-S como 10-90, y T-Z como 100-500. Bungus leyó el nombre de Lutero como Martín Luthera, mitad alemán y mitad latino, un típico caso de escarnio, pero Bungus era un experto. Escribió un diccionario de simbolismo numerológico.

666 en números romanos es DCLXVI, lo que ha llevado a la sugerencia de que este es el origen de 666. Podría ser simplemente una forma de expresar un número grande, o vago.

672

El segundo número triperfecto, después de 120: $672 = 2^5 \times 3 \times 7$ y la suma de sus divisores es $3 \times 672 = 2016$.

676

El cuadrado palíndromo más pequeño cuya raíz cuadrada no es palíndroma: $676 = 26^2$.

679

El número más pequeño con persistencia multiplicativa igual a 5.

El producto de sus dígitos es 378, y el producto de estos dígitos es 168, que genera 48, que genera 32, que genera 6, un total de 5 pasos.

680

680 es el número tetraédrico más pequeño que es la suma de dos números tetraédricos: 680 = 120 + 560.

714

El 8 de abril de 1974, en Atlanta, Georgia, Henry Aaron bateó su jonrón número 715 en la liga mayor, eclipsando así la marca anterior de 714 que había ostentado durante mucho tiempo Babe Ruth. Este evento recibió tanta publicidad anticipada que los números 714 y 715 estaban en millones de bocas. Preguntas como: '¿Cuándo crees que obtendrá el 715?' fueron perfectamente entendidas, incluso sin mencionar a Aaron, Ruth o el jonrón. En todo el alboroto parece que se pasaron por alto algunas propiedades interesantes de 714 y 715

escribió C. Nelson, D. E. Penney y C. Pomerance en *The Journal of Recreational Mathematics*, 1974.

Los autores notan algunas propiedades muy inusuales. Primero, 714 × 715 = 510510 = 2 × 3 × 5 × 7 × 11 × 13 × 17, que es el primorial 17, el producto de todos los primos hasta el 17 inclusive. Descubrieron en la computadora que sólo los primoriales 1, 2, 3, 4 y 7 pueden ser representados como el producto de números consecutivos, hasta el primorial 3049.

Observan además que σ(714), que se define como la suma de los divisores de 714 incluyéndose a sí mismo, es un cubo perfecto, y que la relación σ(714)/φ(714) es un cuadrado perfecto. Finalmente notan que 714 + 715 = 1429 que tiene la propiedad de que 6 disposiciones de sus dígitos son números primos.

719

719 = 6! – 1, y es primo.

n! – 1 es primo para *n* = 3, 4, 6, 7, 12, 14, 30, 32, 33, 38, 94, 166, 324, 379, 469, y ningún otro número inferior a 546.

720

720 = 6! y es también el producto de enteros consecutivos de 2 maneras: 720 = 10 × 9 × 8 = 6 × 5 × 4 × 3 × 2.

729

93 y el segundo cubo más pequeño es la suma de 3 cubos: $9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3$

Como $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$, 9^3 es también la suma de 5 cubos.

729 = 36 y por lo tanto es 1.000.000 en base 3.

729 es otro número misterioso en la *República* de Platón:

> ...si uno expresara la extensión del intervalo entre el rey y el tirano respecto al verdadero placer que encontrará al completar la multiplicación que vive 729 veces más feliz y que la vida del tirano es más dolorosa por la misma distancia.

729 era de gran importancia para los pitagóricos, siendo 27^2. Platón combinó las dos secuencias de potencias de 2 y 3 hasta los cubos para formar la secuencia 1 2 3 4 8 9 27. En esta serie 27 es la suma de todos los miembros anteriores.

C. A. Browne interpreta el número en términos de un cuadrado mágico 27 por 27, cuya celda central está ocupada por 365, el número de días del año (729 = 364 + 365).[36]

1/729 tiene un período decimal de 81 dígitos, que se pueden ordenar en grupos de 9 dígitos, leyendo a través de cada fila, en este patrón:[37]

001 371 742
112 482 853
223 593 964
334 705 075
445 816 186
556 927 297
668 638 408
779 149 519
890 260 631

780

[36] W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Dover, Nueva York, 1960.

[37] V. Thebault, *Scripta Mathematica*, vol. 19.

780 y 990 son el segundo par más pequeño de números triangulares cuya suma y diferencia (1770 y 210) también son triangulares.

818

818 a 831 es la mayor diferencia entre dos semi-primos menores de 1000.

836

Casi todos los números con cuadrados palíndromos parecen tener un número par de dígitos. 836 es el primero con un número impar: 836^2 = 698896. También es el número más grande por debajo de 1000 cuyo cuadrado es palíndromo.

840

$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

Es el número por debajo de 1000 con el mayor número de divisores: $2^5 = 32$.

854

$854^2 = 729316$, operación que utiliza todos los dígitos 1-9 una vez cada uno.

873

$873 = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6!$

880

Hay exactamente 880 cuadrados mágicos de orden 4, siempre que todas las rotaciones y reflejos de un mismo cuadrado se cuenten como uno solo.

945

El primer número impar abundante, descubierto por Bachet. También es semiperfecto.

$945 = 3^3 \times 5 \times 7$ y sus divisores suman 975.

Los números impares y abundantes son bastante raros. Sólo hay 23 de ellos por debajo de 10.000.

981

El único ejemplo conocido de 5 tríos de números de tal manera que las sumas de cada trío son iguales y sus productos también son iguales, es: 6, 480, 495; 11, 160, 810; 12, 144, 825; 20, 81, 880; 33, 48, 900.

La suma de cada trío es 981, y su producto común 1.425.600. [Guy]

999

La suma mínima de primos pandigitales de 3 dígitos, 149 + 263 + 587 = 999.

$999^2 = 998001$ y 998 + 001 = 999, así que 999, como todos los números cuyos dígitos son todos 9, es Kaprekar.

De hecho, cualquier múltiplo de 999 puede ser separado en grupos de 3 dígitos desde la posición de la unidad, que cuando se agrega sumará 999.

El mismo principio se aplica a los múltiplos de 9 99 9999 y así sucesivamente. 999 = 27 × 37 y así 1/27 = 0,037037... y 1/37 = 0,027027...

1000

$1000 = 10^3$ en cualquier base.

1001

1001 = 7 × 11 × 13

Esta es la base para una prueba de divisibilidad que probará para los tres divisores simultáneamente.

Marque el número a probar en grupos de 3 dígitos desde la posición de la unidad. En la mayoría de los casos, los números grandes se escriben de esta manera, por ejemplo, 68.925.857.

Sume el primer, tercer, quinto grupo y quite el total de los grupos segundo, cuarto... El número será divisible por 7, o 11 o 13, si el resultado es divisible por 7, 11 o 13 respectivamente: 68 + 857 – 925 = 0.

1024

$1024 = 2^{10}$ y por lo tanto el número más pequeño con 10 factores primos.

Aunque kilo en el sistema métrico normalmente significa mil, como en kilogramo, 1K de memoria en una computadora significa 1024. Es una buena coincidencia que 2^{10} se acerque tanto a 10^3.

1089

$1089 \times 9 = 9801$

La misma propiedad es cierta en 10989, 109989 y así sucesivamente.

1/1089 = 0,00091827364554637281 91 00091... [N. Goddwin]

Si se invierte un número de 3 dígitos y se resta el resultado, y esa respuesta se suma a su inversión, la respuesta es siempre 1089: 623 – 326 = 297 y 297 + 792 = 1089.

Observe el dígito del medio, 9, y el hecho de que 1089 = 999 + 90.

El único otro número de 4 o menos dígitos cuya inversión es un múltiplo de sí mismo es $2178 = 2 \times 1089$. Este número y el 1089 fueron citados por G. H. Hardy como ejemplos de matemáticas no serias.

$1089 = 33^2 = 65^2 - 56^2$

Este es el único ejemplo de 2 dígitos de este patrón.

1093

$2^{1092} - 1$ es divisible por 1093^2.

Sólo se conoce otro número por debajo de 6×10^9 con esta propiedad, 3511.

En 1909 Wieferich creó una sensación al probar que si la ecuación de Fermat, $x^p + y^p = z^p$, tiene una solución en la que p es un primo impar que no divide nada de x, y o z, entonces $2^{p-1} - 1$ es divisible por p^2.

En cuanto a los hechos sobre el Último Teorema de Fermat, esto es notablemente simple. El hecho de que 1093 y 3511 sean las únicas soluciones por debajo de 6×10^9 significa que sólo estos dos casos del teorema de Fermat necesitan ser considerados, por debajo de ese límite, si p no divide xyz.

1105

$1105 = 5 \times 13 \times 17$ es el producto de los 3 primeros primos de la forma $4n + 1$, y es la suma de 2 cuadrados de 4 maneras diferentes.

1111

$1111 = 56^2 - 45^2$ después de $11 = 6^2 - 5^2$. El patrón continúa, $556^2 - 445^2 = 111.111$ y así sucesivamente.

Del mismo modo, $7^2 - 4^2 = 33$, $67^2 - 34^2 = 3333$ y así sucesivamente, y $8^2 - 3^2 = 55$, $78^2 - 23^2 = 5555$ y así sucesivamente...

1127

Thebault da $1127^2 = 01270129$ como ejemplo de un cuadrado que consiste en dos números pares o impares consecutivos yuxtapuestos.

Cita el número ‘coincidente’ $8874^2 = 78747876$, señalando que $1127 + 8874 = 10001$, y otros pares con la misma propiedad.

V. Thebault, *Scripta Mathematical* vol. 13.

1141

$1141^6 = 74^6 + 234^6 + 402^6 + 474^6 + 702^6 + 894^6 + 1077^6$

Esta es la solución más pequeña conocida para una 6ta potencia como la suma de otras 7 sextas potencias.

1184

Con 1210, el segundo par más pequeño de números amigables, descubierto en 1866 por Nicolo Paganini cuando era un colegial de 16 años, habiendo sido inadvertido anteriormente por Descartes, Fermat, Euler y muchos otros.

1201

'El número 1201 parece ser el primo más pequeño que puede expresarse en la forma $x^2 + ny^2$ para todos los valores de n de 1 a 10.'

Jekuthiel Ginsberg, *Scripta Mathematica*, vol. 8.

1210

Con 1184, el par de números amigables de Paganini.

1225

$1225 = 35^2 = \frac{1}{2} \times 49 \times 50$

Es el segundo número en ser simultáneamente cuadrado y triangular. Los dos siguientes son 204^2 y 1189^2.

1233

$1233 = 12^2 + 33^2$

B. S. Rao encuentra tales números expresando un número de la forma $n^2 + 1$ como la suma de 2 cuadrados de otra manera.

Otro ejemplo es $8833 = 88^2 + 33^2$.

Mathematics Magazine, vol. 57.

1375

1375, 1376 y 1377 es el trío más pequeño de enteros consecutivos, cada uno de los cuales es divisible por un cubo, excepto 1.

Eureka, 1982.

1444

$1444 = 38^2$

Es el cuadrado más pequeño que termina en los dígitos repetidos …444.

El siguiente es $462^2 = 213444$.

La fórmula general es $(500n \pm 38)^2 = ...444$. [Beiler]

1444 es también el 4to cuadrado cuyos dígitos forman otros dos cuadrados yuxtapuestos, 1444 = 144:4.

1540

Uno de los únicos 5 números que son simultáneamente triangulares y tetraédricos.

Es el 55º número triangular y el 20º tetraédrico.

1549

1549 es el único número impar por debajo de 10.000 que no es la suma de un primo y una potencia.

1634

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$

1675

Invertido y sumado, empezando por 1675 + 5761 = 7436, un total de 4850 veces, produce un número de 2000 dígitos sin producir un palíndromo.

1681

$1681 = 41^2$

El único cuadrado de 4 dígitos cuyos 2 dígitos ‘mitades’ son también cuadrados, aparte de los obvios, 1600, 2500 ... 8100.

1728

$1728 = 12^3$ y por lo tanto igual a 1000 en el sistema duodecimal, y el número de pulgadas cúbicas en un pie cúbico.

1729

Entre los más famosos de todos los números, debido a un incidente descrito por G. H. Hardy. Ramanujan, escribe Hardy,

podía recordar la idiosincrasia de los números de una manera casi extraña. Fue Littlewood quien dijo que cada entero positivo era uno de los amigos personales de Ramanujan. Recuerdo que fui a verlo una vez cuando estaba enfermo en Putney. Había viajado en un taxi número 1729, y comenté que el número me parecía bastante aburrido, y que esperaba que no fuera un presagio desfavorable. 'No,' reflexionó, 'es un número muy interesante; es el número más pequeño expresable como la suma de dos cubos de dos maneras diferentes.'[38]

$1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

Hardy entonces le preguntó a Ramanujan si sabía la respuesta al mismo problema para la 4ta potencia, pensó Ramanujan por un momento, y le contestó que no lo sabía, pero que debía ser muy grande.

Esta propiedad de 1729 fue encontrada por Frenicle, un brillante calculador, que en respuesta a un desafío de Euler dio cinco soluciones: $9^3 + 10^3 = 12^3 + 1^3$; $9^3 + 15^3 = 2^3 + 16^3$; $15^3 + 33^3 = 2^3 + 34^3$; $16^3 + 33^3 = 9^3 + 34^3$ y $19^3 + 24^3 = 10^3 + 27^3$.

1729 también es Harshad, es decir, es divisible por la suma de sus propios dígitos: $1729 = 19 \times 91$.[39]

Es también el tercer número de Carmichael.

1760

[38] G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University Press, Cambridge, 1940.

[39] En matemáticas, un número de Harshad, o número de Niven, es un entero divisible por la suma de sus dígitos en una base dada. Estos números fueron definidos por D. R. Kaprekar, un matemático indio. La palabra "Harshad" proviene del sánscrito, que significa gran alegría. Número de Niven toma su nombre de Ivan Morton Niven, un matemático canadiense y norteamericano, que presentó un artículo en 1997. Todos los números entre cero y la base, son números Harshad (*Wikipedia*).

1 milla terrestre = 1760 yardas = 320 varillas, postes o perchas = 8 estadios.

1782

1782 es igual a 3 veces la suma de todas las combinaciones de 2 dígitos que se pueden hacer con sus dígitos, 1, 7, 8 y 2.

1854

1854 es subfactorial 7, o !7.

1980

1980 – 0891 = 1089

Este es uno de sólo 5 patrones en el que restar un número de 4 dígitos de su inversión deja los dígitos reordenados.

Los otros son 5823 – 3285 = 2538; 3870 – 0783 = 3087; 2961 – 1692 = 1269 y 9108 – 8019 = 1089.

2025

2025 = 45^2 y 20 + 25 = 45, es por lo tanto un número de Kaprekar.

Cuando cada uno de sus dígitos se incrementa en 1, 2025 se convierte en 3136, que también es un cuadrado, 562.

Un par de cuadrados de 2 dígitos que hacen juego son 25 y 36.

2047

2047 = 2^{11} – 1, y por lo tanto es el 11mo número de Mersenne. Es el primer número de Mersenne con un exponente principal, que es compuesto: 2047 = 23 × 89.

2178

2178 × 4 = 8712, su propia inversión.

El mismo patrón funciona para 21978, 219978, y así sucesivamente.

2178 es una invariante digital de cuarto orden, que cambia a 6514 y viceversa: $2^4 + 1^4 + 7^4 + 8^4 = 6514$ y $6^4 + 5^4 + 1^4 + 4^4 = 2178$.

2187

$2187 = 3^7$ o 10.000.000 en base 3.

2201

Esta es la raíz no palíndroma más pequeña de un cubo palíndromo: $2201^3 = 10.662.526.601$.

2240

El número de libras en una tonelada inglesa. En América, el número de libras en una tonelada larga, siendo la tonelada corta de 2000 libras.

1 tonelada = 2240 libras = 160 piedras = 80 cuartos = 20 quintales.

2310

Primorial 11 = $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ y por lo tanto el número más pequeño con 5 factores primos diferentes.

2333

$2333^2 = 5442889$, siguiendo el patrón $3^2 = 9$, $23^2 = 529$, $233^2 = 54289$ y así sucesivamente.

2520

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es la suma de 4 divisores propios de 6 maneras, la máxima posible.

Las seis combinaciones de factores son: 1260, 630, 504, 126; 1260, 630, 420, 210; 1260, 840, 360, 60; 1260, 840, 315, 105; 1260, 840, 280, 140; 1260, 840, 252, 168.

2520 es el número más pequeño. El problema es equivalente a expresar la unidad como la suma de 4 recíprocos.

Journal of Recreational Mathematics, vol. 14.

2592

$2592 = 2^5 \times 9^2$, el único de su tipo. [Dudeney]

2615

$2615 \times 11 = 28765$ y $5162 \times 11 = 56782$, su inversión.

La elección de 2615 para esta propiedad es altamente arbitraria, porque este patrón funciona siempre que los dígitos adyacentes de un número no suman más de 9, para cualquier par. Así que funciona para 2363511509 pero no para 45173, por ejemplo.

2620

El primer miembro del tercer par de números amigables. Su socio es 2924.

2821

$2821 = 7 \times 13 \times 31$ y 6, 12 y 30 cada uno dividen 2820.

2821 es por lo tanto un número de Carmichael, de hecho el 4to.

3003

3003 es el número más pequeño que aparece 8 veces en el triángulo de Pascal.

No hay ningún otro número que aparezca tan a menudo, menor de 2^{23}.

David Singmaster, *American Mathematical Monthly*, April 1971.

3333

El calendario gregoriano se adelanta aproximadamente un día cada 3.333 años.

$67^2 - 34^2 = 3333$

3334

$3334^2 = 11115556$, siguiendo el patrón $4^2 = 16$, $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$ y así sucesivamente.

Cuando se eleva al cubo, $3334^3 = 0370.5926.3704$ y la suma de los 3 números de 4 dígitos es $0370 + 5926 + 3704 = 10.000$.

Journal of Recreational Mathematics, vol. 14.

3367

Este número puede ser multiplicado por un multiplicador de 2 dígitos *xy* dividiendo el número *xyxyxy* por 3.

Este truco funciona porque $3367 = 10101/3$.

Gardner, 1975.

3435

$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$. [Madachy]

3511

Uno de los dos únicos números conocidos que hacen $2^{p-1} - 1$ divisible por p^2. El otro es 1093.

3600

$3600 = 60^2$

El número de segundos en una hora, o segundos en un grado, o minutos en un círculo completo.

4096

$4096 = 2^{12} = 8^4 = 16^3$

Por lo tanto, es igual a 1.000.000.000.000 en binario; 10.000 en octal y 1000 en hexadecimal.

4181

El 19no número de Fibonacci, pero aunque el 19 es primo, este no lo es: 4181 = 37 × 113.

Este es el primer número compuesto de Fibonacci con una raíz prima.

4356

4356 multiplicado por 1,5 es 6534, su inversión. Tenga en cuenta que 4356 = 1089 × 4.

4840

4840 = 22 × 220 es el número de yardas cuadradas en un acre.

4900

El único número piramidal cuadrado que también es un cuadrado.

$4900 = 70^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + 24^2$

4913

$4913 = 17^3$ y también la suma de sus dígitos es 17.

5020

El primer miembro de la 4ta pareja amigable. Su amigo es 5564.

5040

Factorial de 7: 5040 = 7! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7

En la campana que suena, una secuencia completa de Triples de Stedman contiene 7! = 5040 cambios, y toma tres o cuatro horas para sonar.

5186

Platón, en las *Leyes*, sugirió que un número adecuado de hombres para una ciudad ideal sería el número que contenga las subdivisiones más numerosas y consecutivas. Se decide por 5040, indicando que este número tiene 59 divisores (aparte de sí mismo) y puede ser dividido para propósitos de guerra ‘y en paz para todos los propósitos relacionados con contribuciones y distribuciones’ por cualquier número del 1 al 10.

Además, al restar simplemente dos corazones del total, es entonces divisible exactamente por 11 también.

5186

$\varphi(5186) = \varphi(5187) = \varphi(5188)$

Este es el único trío conocido de enteros sucesivos con los mismos valores de φ.

5777

La conjetura de que cada número impar puede ser representado en la forma $p + 2a^2$, donde p es un primo, es falsa, pero sólo hay dos contraejemplos por debajo de 121.000.

5777 es uno, y 5993 es el otro.

5913

$5913 = 1! + 2! + 3! + ... + 6! + 7!$

6174

El proceso de Kaprekar

6174 es la constante de Kaprekar, el resultado del proceso de Kaprekar aplicado a cualquier número de 4 dígitos, aparte de los números excepcionales cuyos dígitos son todos iguales.

Tome cualquier otro número de 4 dígitos y ordene los dígitos en orden ascendente y descendente, de modo que, por ejemplo, 4527 conduce a 2457 y 7542. Reste, y repita. El resultado final es el número 6174:

7542 – 2457 = 5085
8550 – 0558 = 7992
9972 – 2799 = 7173
7731 – 1377 = 6354

6543 – 3456 = 3087
8730 – 0378 = 8352
8532 – 2358 = 6174
7641 – 1467 = 6174 y el cálculo se repite.

6174 es también un número Harshad, porque es divisible por la suma de sus dígitos.

6578

$6578 = 1^4 + 2^4 + 9^4 = 3^4 + 7^4 + 8^4$

Esta es la representación más pequeña de un número como la suma de 3 cuartas potencias en 2 maneras.

6666

$6666^2 = 44435556$ y las dos mitades 4443 y 5556 suman 9999.

El patrón es el mismo para cualquier cadena de 6s. Comparar $3333^2 = 11108889$ y 1110 + 8889 = 9999, y $7777^2 = 60481729$ donde 6048 + 1729 = 7777, haciendo a 7777 Kaprekar.

De manera más general, si un número se multiplica por un número cuyos dígitos son todos iguales, por ejemplo, que 894 se multiplique por 22222, entonces en este caso los 5 dígitos de la derecha, sumados a la parte de la izquierda, forman otro número con dígitos iguales: 894 × 22222 = 19866468 y 198 + 66468 = 666666.

6667

$6667^2 = 44448889$ y 44448889 × 3 = 133346667, que termina en los mismos cuatro dígitos, 6667.

Por lo tanto, el 6667 se llama tri-automorfo.

Para cualquier número dado de dígitos, hay 3 números tri-automorfos. Los otros 4 dígitos son 9792 y 6875.

Los 3 números tri-automorfos de 10 dígitos son 6666666667, 7262369792 y 9404296875.[40]

Los patrones que aparecen en 66672, y de manera similar en 33342 y así sucesivamente, son ejemplos de una regla general. Cualquier número, de cualquier cantidad de dígitos, formará un patrón cuando un número suficientemente grande de 3s, 6s o 9s estén prefijados a él.

Así, $72^2 = 5184$ $672^2 = 451584$ y $6672^2 = 44515584$, y así sucesivamente.

6729

El doble de 6729 es 13458, los 2 números contienen los dígitos del 1 al 9 entre ellos.

6999

Cuando 6999 se invierte y se añade a sí mismo, 6999 + 9996 = 16995, y este proceso se repite, toma 20 pasos para convertirse en un palíndromo, y el palíndromo resultante es el más largo para un número de hasta 10.000.

7998 también lleva después del primer paso a 16995.

7140

El número más grande que es tanto triangular como tetraédrico. 7140 es el 119° número triangular y el 34° número tetraédrico.

7560

$7560 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$ tiene 64 factores, más que cualquier otro número por debajo de 10.000, excepto $9240 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, que también tiene 64 factores.

7744

[40] J. A. H. Hunter, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 5.

$7744 = 88^2$ es el único cuadrado con este patrón de dígitos.

8000

$8000 = 20^3$ es la suma de 4 cubos consecutivos: $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3$.

8042

Este es probablemente el número entero más grande que no puede ser representado como la suma de menos de 8 cubos.

8128

$8128 = 2^6(2^7 - 1)$ es el 4to número perfecto.

8191

$8191 = 1 + 90 + 90^2 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{12}$

$8191 = 2^{13} - 1$ es un primo de Mersenne. Tenga en cuenta que el índice 13 también es primo. Se había conjeturado que aunque la mayoría de los números de Mersenne parecen ser compuestos, un número de Mersenne cuyo índice era primo sería en sí mismo primo. Esto habría proporcionado una fórmula para una secuencia infinita de primos, aunque una secuencia que se vuelve incalculablemente grande muy rápidamente.

La conjetura, sin embargo, es falsa. $2^{8191} - 1$ es compuesto.

8208

$8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$

8281

$8281 = 91^2$ es un cuadrado cuyos dígitos forman dos enteros sucesivos. Este es el único cuadrado de 4 dígitos con esta propiedad.

8712

El sujeto de una de las propiedades matemáticas de G. H. Hardy. Es un múltiplo de su inversión, 2178. (*Ver* ***153***.)

9240

Tiene 64 divisores.

9642

Cuando se multiplica por 87531 forma el producto más grande de 2 números usando los dígitos del 1 al 9 una vez cada uno.

9801

$9801 = 99^2$ y 98 + 01 = 99, así que 9801 es un número Kaprekar.

9999

$9999^2 = 99980001$, y las dos mitades Kaprekar, 9998 y 0001, suman 9999.

Compárese 99993 = 999700029999, de los cuales 3 ‘tercios’ suman 2 x 9999.

10.001

10001 = 73 × 137

Compare 101, que es primo, 1001 = 7 × 11 × 11 × 13 y 100001 = 11 × 9091.

10.989

10989 × 9 = 98901

11.593

Este número es el primero en una secuencia de 9 primos consecutivos todos de la forma 4*n* + 1. [Guy]

11.826

$11{,}826^2$ es el cuadrado pandigital más pequeño. Fue notado por primera vez por John Hill en 1727, quien pensó que era el único cuadrado pandigital.

12.285

Junto con 14.595 el par más pequeño de números impares amigables, descubierto por B. H. Brown en 1939.

12.496

Números sociables

12496 es el primero de una cadena de cinco números sociables, descubierta por Poulet en 1918.

La suma de los divisores, excluyéndose a sí mismo, de cada número es el siguiente número de la cadena, el último número que precede al primero: 12496; 14288; 15472; 14536; 14264; (12496).

Esta cadena y la cadena de 28 eslabones que comienza en 14316 fueron las únicas cadenas sociables conocidas hasta 1969, cuando, por supuesto, Henri Cohen verificó todos los valores posibles para el más pequeño de los pares por debajo de 60 millones, y descubrió 7 nuevas cadenas, cada una de 4 eslabones.

Recientemente se han encontrado más cadenas.

Curiosamente no se han encontrado cadenas con sólo tres eslabones, a pesar de una búsqueda diligente. Ciertamente no hay ninguno con menos de 50 millones de miembros. Alguien llamó a estas hipotéticas cadenas ‘multitudes’, así que matemáticamente hablando una multitud es un fenómeno muy difícil de alcanzar, y puede que no exista en absoluto.

12.758

Este es el número más grande que no puede ser representado como la suma de los distintos cubos.

R. E. Dressier and T. Parker, *Mathematics of Computation*, 28: 125 (1974).

14.316

El comienzo de una notable cadena sociable de no menos de 28 números, descubierta por Poulet en 1918. [Beiler]

Comenzando en la parte superior de la columna de la izquierda, y leyendo hacia abajo, la suma de los divisores propios de cada número es igual al siguiente número, 17716 finalmente regresando a 14316:

14316	629072	275444	97946
19116	589786	243760	48976
31704	294896	376736	45946
47616	358336	381028	22976
83328	418904	285778	22744
177792	366556	152990	19916
295488	274924	122410	17716
			(14316)

Ninguna otra cadena sociable de esta extensión se conoce, o más larga que ésta, a pesar de su venerable edad.

16.830

$16{,}830^3$ es la suma de todos los cubos consecutivos de 11343 a 21333. [Beiler]

16.843

Charles Babbage conjeturó que $\binom{2p-1}{p-1} - 1$ es divisible por p^2 si y sólo si p es primo.

La conjetura es falsa, y el contra-ejemplo más pequeño es 16843^2. Cualquier potencia superior de 16843 es también un contra-ejemplo, n^2 no es un contra-ejemplo para cualquier otro n menos de 150.000. [David Singmaster]

17.163

Este es el número más grande que no es la suma de los cuadrados de los distintos primos.

H. Gupta, *Selected Topics in Number Theory*, Abacus Press, Tunbridge Wells, 1980.

17.296

Con 18.416 el segundo par de números amigables que se descubre.

19.600

Sólo dos números son simultáneamente cuadrados y tetraédricos.

Uno es el poco interesante $4 = 2^2 = 1 + 3$ y el otro es $19600 = 140^2 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ... + 1176$.

20.161

Cada número mayor de 20.161 es la suma de 2 números abundantes.

20.736

12^4 y por lo tanto 10.000 en base 12 o duodecimal.

21.000

El primer número en usar tres palabras en su descripción normal en inglés: ‘twenty-one thousand’. [Sloane]

26.861

Primos 4n + 1 y 4n + 3

Debajo de 26861 hay exactamente tantos primos de la forma $4n + 1$ como primos de la forma $4n + 3$. Puesto que 26861 es primo del tipo $4n + 1$, pone los primos $4n + 1$ en la mayoría, por primera vez.

Todos los números primos más allá de 2 son de la forma $4n + 1$ o $4n + 3$. ¿Qué forma es la más común? La secuencia de primos comienza así, donde el tipo ***cursiva*** muestra primos de la forma $4n + 3$: ***3*** ***5*** ***7*** ***11*** 13 17 ***19*** ***23*** 23 29 ***31*** 37 41 ***43*** ***47*** 53 ***59*** 61 ***67*** ***71*** 73...

De los primeros 20 primos, 11, una mayoría mínima, son de la forma $4n + 3$. Sin embargo, esta mayoría continúa hasta 26849, en cuyo momento son iguales en número, y luego 26861 inclina la balanza, aunque sólo sea momentáneamente. Los dos primos siguientes, 26863 y 26979 son ambos de tipo ‘4*n* + 3’.

Aunque los primos del 4n + 1 parecen ser una minoría, Littlewood demostró que el predominio cambia de uno a otro un número infinito de veces.

Carter Bays y Richard H. Hudson, ‘On the Fluctuations of Littlewood for Primes of the form 4*n* ± 1’, *Mathematics of Computation*, vol. 32.

27.594

Este número puede ser escrito de dos maneras curiosamente relacionadas como un producto: 27.594 = 73 × 9 × 42 = 7 × 3942. [Madachy]

30.739

¿Para qué números son casi iguales las partes decimales de las raíces cuadradas y cúbicas?

Hasta 50.000 la diferencia más pequeña se encuentra en la raíz cuadrada y la raíz cúbica de 30.739 cuyas partes decimales difieren en aproximadamente 0,0000151.

El primer número entero posterior que produce una diferencia menor es 62.324. Las partes decimales de sus raíces cuadradas y cúbicas difieren en aproximadamente 0,000011576.

J. H. Baumwell and F. Rubin, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 9.

40.311

El comienzo de la secuencia más larga conocida de enteros consecutivos con el mismo número de divisores: 40311, 40312, 40313, 40314 y 40315 cada uno tiene 8 divisores. [Le Lionnais]

40.320

Factorial de 8, o 8!

40.585

Igual a la suma de los factoriales de sus dígitos: 40.585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!. Esto fue descubierto en 1964 por Leigh Janes. [Madachy]

40.755

El primer número, aparte del 1 trivial, que es simultáneamente triangular, pentagonal y hexagonal.

45.045

Igual a $5 \times 7 \times 3^2 \times 11 \times 13$, y el primer número impar abundante a ser descubierto, por Carolus Bovillus.

47.619

047619 es el período de 1/21, el número más pequeño con dos factores primos que no dividen 10.

Las dos ‘mitades’, 047 y 619, suman 666: es un múltiplo de 333 pero no de 999: $47619 = 143 \times 333$.

Los tres ‘tercios’, 04, 76 y 19, suman 99, por lo que es un múltiplo de 99; de hecho es 99×481.

$047619^2 = 2.267.569.161$

Sumando las dos ‘mitades’ de 6 cifras: 569161 + 2267 = 571428, que es el período de 4/7.

50.625

Equal to $15^4 = 4^4 + 6^4 + 8^4 + 9^4 + 14^4$.

Este es el ejemplo más pequeño de una 4ta potencia igual a la suma de sólo otras 5 cuartas potencias.

54.748

Igual a la suma de las quintas potencias de sus dígitos: $54.748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$.

$65.536 = 2^{16}$

Una memoria de ordenador de 64K contiene en realidad 65.536 bytes.

65.537

Igual a $2^{2^4} + 1$. El 4to número de Fermat, y el mayor número de Fermat conocido. Por lo tanto, es posible construir un polígono regular de 65.537 lados por métodos clásicos usando una regla y compás solamente.

Los 384 cuadráticos necesarios para una construcción real del 65.537-gono fueron calculados por J. G. Hermes en 1894.

69.696

Igual a 264^2 y por lo tanto un cuadrado palíndromo cuya raíz no es palíndroma.

076.923

Se incluye el cero inicial porque es la expansión decimal de 1/13 = 0,076923 076923...

Multiplicado por 3, 4, 9, 10 o 12 el resultado es una permutación cíclica de los mismos dígitos. Multiplicado por 2, 5, 6, 7, 8 u 11, el resultado es una permutación cíclica de 153846.

78.557

Los números primos de la forma $k \times 2^n + 1$ han sido muy estudiados, sobre todo porque los factores de los números Fermat son siempre de esta forma.

La secuencia de números $78557 \times 2^n + 1$ es inusual porque no es primo para ningún valor positivo de n. Cada miembro de la secuencia es divisible por uno de los primos 3, 5, 7, 13, 19, 37 o 73.

78557 es posiblemente el valor más pequeño de k, de modo que $k \times 2^n + 1$ es siempre compuesto.

R. Baillie, G. Cormack and H. C. Williams, The Problem of Sierpinski concerning $k \times 2^n + 1$', *Mathematics of Computation*, vol. 37.

90.625

El único número automorfo de 5 dígitos que no comienza con un cero. Su cuadrado termina en los mismos dígitos, ...90625

94.249

Igual a 307^2 y por lo tanto un cuadrado palíndromo cuya raíz no es en sí misma palíndroma.

99.954

El proceso de Kaprekar para todos los números de 5 dígitos cuyos dígitos no son todos iguales conduce a uno de tres ciclos separados. El ciclo más pequeño es 99954-95553. Los otros dos ciclos son 98532-97443-96642-97731 y 98622-97533-96543-97641. [Kordemsky]

100.001

Igual a 11 × 9091.

125.000

El segundo caso del Último Teorema de Fermat, donde el exponente p en $x^p + y^p = z^p$ divide uno de los números x, y o z, ha demostrado ser imposible para todos los valores de p hasta 125.000.

142.857

Números cíclicos

Un número muy querido de todos los matemáticos recreativos. Es el período decimal de 1/7: 1/7 = 0,142857 142857 142857…

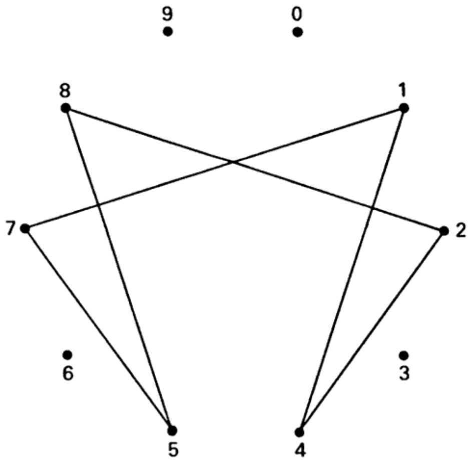
1/7 es el primer decimal recíproco que tiene un período máximo, es decir, la duración de su período es sólo 1 menos que el número mismo.

La multiplicación por cualquier número del 1 al 6 produce una permutación cíclica de los mismos números:

142857 × 1 = 142857
142857 × 2 = 285714

$142857 \times 3 = 428571$
$142857 \times 4 = 571428$
$142857 \times 5 = 714285$
$142857 \times 6 = 857142$

La secuencia de dígitos también hace un patrón llamativo cuando los dígitos están dispuestos alrededor de un círculo.



La multiplicación por números más altos produce el mismo patrón de nuevo, con una ligera diferencia.

Por ejemplo, $12 \times 142857 = 1714284$, que se convierte en 714285 cuando el 1 extra se toma del frente y se añade a los 4 en el lugar de las unidades.

Otro ejemplo: multiplicar 142857 por sí mismo.

$142857^2 = 20.408.122.449$. Separe este número en grupos de 6 dígitos, desde la derecha, y agréguelos: $122.449 + 20.408 = 142.857$.

Esto hace que 142857 sea un número de Kaprekar.

Hay una excepción a este patrón: multiplicación por 7, o un múltiplo de 7: $142857 \times 7 = 999999$. Esta es una propiedad de todos los períodos de repetición de decimales. Si el período de n se multiplica por n, el resultado es tantos 9 como dígitos hay en n.

Note que esta relación es simétrica. Porque 142857 × 7 = 999999, el período decimal de 1/7 es 142857 y el período decimal de 1/142857 es 7. De hecho 1/142857 = 0,000007 000007 000007 000007...

142857 tiene otra conexión con 9. Divida el 142857 mismo en dos ‘mitades’, y súmelas: 142 + 857 = 999.

Ahora cualquier número cuyos dígitos cuando se agrupan en 3s desde el final de las unidades suman 999 es un múltiplo de 999, y a la inversa, así que 142857 debe ser un múltiplo de 999. ¿Lo es? Sí, porque 999 divide 999.999 = 7 × 142857 sin tener ningún factor en común con 7. De hecho 142857 = 999 × 143.

De ello se deduce que 999999, que es 7 × 142857, es también 7 × 999 × 143, y por lo tanto 7 × 143 = 1001 y 142857143 × 7 = 1.000.000.001. Esta es la base de un hermoso truco de ‘cálculo veloz’ descrito por Martin Gardner: para multiplicar cualquier número de 9 dígitos por 142857143, se escribe mentalmente el número dos veces, para que se vea mentalmente, por ejemplo, 577831345 como 577831345577831345 y luego simplemente se divide este número por 7. ¡ya está!

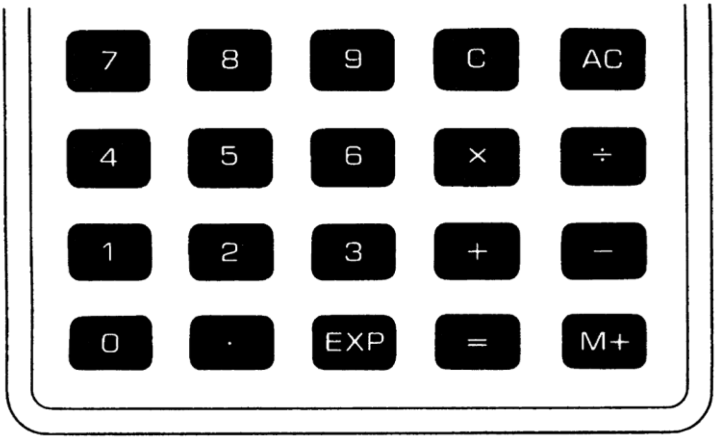
La respuesta es doblemente impresionante porque puede escribirla, empezando por la izquierda, tan pronto como se le den los primeros dígitos del segundo número.

Las dos ‘mitades’ de 1/7 tienen otra bonita propiedad. Si 857 se divide por 142 el cociente es 6 (= 7 – 1) y el resto es 5 (= 7 – 2): 857 = 142 × 6 + 5.

Si agrupamos los dígitos en pares, entonces por la misma razón sumarán 99: 14 + 28 + 57 = 99. Podemos agrupar los dígitos en 3 y 2, porque la duración del período es 6. Cualquiera que sea la duración del período, podemos ‘agrupar’ los dígitos individualmente. En este caso confirmamos que 142857 es divisible por 9: 1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27 y 2 + 7 = 9.

El patrón es más fuerte que eso. Son los dígitos opuestos en el círculo, por así decirlo, los que se suman a 9. 1 es 8 opuesto, 4 opuesto 5 y 2 opuesto 7.

La disposición natural de los dígitos en una calculadora tiene una simetría similar.



No es diferente del patrón de un cuadrado mágico, y los números tienen propiedades similares. 8×1, 7×2 y 4×5 están en progresión aritmética, al igual que $4^2 + 5^2$, $2^2 + 7^2$ y $8^2 + 1^2$. [Kaprekar y Khatri]

El patrón de adición de ‘mitades’ o ‘tercios’ funciona para cualquier múltiplo de 142857 (a excepción de la multiplicación por 0), siempre que el proceso, como de costumbre, se repita hasta que se alcancen 3 dígitos o 2 dígitos, respectivamente.

$142857 \times 361 = 51571377$: $51 + 571 + 377 = 999$ y $51 + 57 + 13 + 77 = 198$, que se convierte en 99.

$142857 \times 74 = 10571418$: $10 + 571 + 418 = 999$ y $10 + 57 + 14 + 18 = 99$.

Todos los decimales que se repiten son efectivamente series geométricas con una relación de 1/10, por lo que no es de extrañar que el período repetido de 1/7 también se pueda obtener de muchas maneras como una ‘suma diagonal’, lo que equivale a sumar una progresión geométrica. Por ejemplo, empezando por el frente:

1
3
9
27
81
243
729
. . . . .
142857 . . .

o desde atrás:
35
175
875
4375
21875
109375
. . . .
. . . 857142857142857

¿Parece curioso que 142857 esté muy cerca de 14-28-56... doblando cada vez? Esto tampoco es un accidente:

14
28
56
112
224
448
896
1792
. . . .
142857142857142 . . .

Todas estas propiedades de 142857 son compartidas por los períodos de cualquier recíproco cuyo período es de máxima extensión, con pequeños ajustes como la elección de multiplicadores en el último ejemplo.

Los números del período máximo deben ser primos pero, sorprendentemente, no se conoce ningún método para predecir qué primos tienen un período máximo.

17 lo hace; su período es de longitud 16, y sus propiedades coinciden muy de cerca con las de 1/7. También lo hace 1/19 con el período 18, pero 1/13 tiene un período de sólo 6, por lo que sus propiedades son algo más complejas.

Si el período de $1/n$ no es $n - 1$, es al menos un factor de $n - 1$. El período de 1/13 es 6, la mitad de 12.

Los primeros valores de *n* que producen períodos máximos para 1/*n* son 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, y luego no más hasta 97, seguido de 109, 113 y 131.

Esto no es mucho. ¿Qué proporción de recíprocos de primos tienen un período máximo? Aproximadamente 3/8 según Shanks, o, si una conjetura de Artin es correcta, 0,37396...

Para responder a una pregunta relacionada, Shanks también ha demostrado que los primos con períodos decimales pares son exactamente dos veces más numerosos en promedio que los primos con períodos de duración impar.

¿Qué número de 6 dígitos se multiplica por 5 cuando su dígito de unidad se desplaza al frente del número? La respuesta, por supuesto, es 142857. Esto a veces se llama transmultiplicación. El problema puede ser que también pida que se coloque el primer dígito al final, o que se muevan varios dígitos en un bloque. La solución es siempre el período de algún decimal recíproco.

Los recíprocos de los números compuestos, como el 21, tienen propiedades más complicadas. La más simple es que su período es el múltiplo común más bajo de las duraciones de los períodos de sus factores primos separados, si esos factores ocurren por separado. $21 = 3 \times 7$, cuyos recíprocos tienen períodos 1 y 6, así que 1/21 también tiene período 6. Tenga en cuenta que 6 no es un factor de 20. 142857 es divisible por los repunits 11 y 111.

147.852

Igual a 333×444.

Los dígitos 147852 en varios órdenes que no son permutaciones del período de 1/7 ocurren en varios otros productos también.

Por ejemplo, $666 \times 777 = 517482$ y $333 \times 777 = 258741$.

148.349

El único número que es igual a la suma de los subfactoriales de sus dígitos:[41] 148.349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + 19.

161.038

161.038 = 2 × 73 × 1103

El seudoprimo más pequeño hasta la base 2, descubierto por D.N. Lehmer en 1950.

Incluso los seudoprimos son relativamente raros, aunque hay un número infinito de ellos. El siguiente es 215326.

183.184

Igual a 428^2 y por lo tanto un cuadrado cuyos dígitos forman 2 números consecutivos.

Hay otros 3 números de 6 dígitos con la misma propiedad: 328329 = 573^2, 528529 = 727^2 y 715716 = 846^2.

196.560

El número de esferas que toca cualquier esfera en un entramado de Leech de 24 dimensiones.

208.335

El mayor número conocido que es simultáneamente triangular y cuadrado piramidal. Es el 645° número triangular y el 85° número piramidal cuadrado.

No se sabe si hay números más grandes con esta propiedad, mucho menos si su número es infinito.

248.832

Igual a $12^5 = 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5$.

---

[41] R. S. Dougherty, en Madachy, 1966.

La representación más pequeña de una quinta potencia como la suma de sólo 6 quintas potencias.

278.886

Su cuadrado comienza con una secuencia de 5 sietes: $278.886^2 = 77777400996$.

333.667

333667 × 296 = 98765432, en el que los dígitos 9 a 2 aparecen en orden inverso.

Este es el comienzo de un patrón: 33336667 × 2996 = 99876654332; 3333366667 × 29996 = 99987666543332, y así sucesivamente.

El mismo autor muestra otros patrones que involucran el mismo número:

$$333667 \times 1113 = 371371371$$

$$333336667 \times 11133 = 371137113711$$

$$3333336666667 \times 1111333 = 3711137111137111$$

y así sucesivamente; o 333667 × 2223 = 741741741 y así sucesivamente.

H. Grunbaum, *Scripta Mathematical* vols. 18 and 21.

351.120

Su cubo puede ser representado como la suma de 3 cubos, o 4 cubos, o 5 cubos, o 6 cubos, o 7 cubos, o 8 cubos.

362.880

Igual a 9! = 7!3!3!2!.

369.119

La suma de los primos menores de 369.119 es 5.537.154.119, que es divisible por 369.119.

396.733

Junto con 396.833, el primer par de primos consecutivos que difieren por 100.

510.510

Igual al producto de los primeros 7 números primos, $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ y también igual al producto de 4 números consecutivos de Fibonacci, $13 \times 21 \times 34 \times 55$.

Monte Zerger, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 12.

523.776

$523.776 = 2^9 \times 3 \times 11 \times 31$

El 3er. número tri-perfecto. La suma de sus divisores, incluido él mismo, es $3 \times 523.776 = 1.571.328$.

548.834

Igual a $5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$.

666.666

Para deleite de los numerólogos, el primitivo triángulo pitagórico cuyos lados son 693, 1924 y 2045 tiene un área de 666.666.

698.896

Igual a 836^2. Un cuadrado palíndromo con —un evento raro— un número par de dígitos.

739.397

El primo más grande de dos lados. También, si los dígitos se eliminan de ambos extremos, el resultado es otro número primo.

798.644

El segundo número más pequeño cuyo cuadrado es palíndromo con un número par de dígitos: $798.644^2 = 637.832.238.736$.

828.828

El único palíndromo triangular, aparte de 55, 66 y 666.

1.000.000

$1.000.000 = 10^6$

1.048.576

$1.048.576 = 16^5 = 2^{20}$

100.000 en hexadecimal.

1.122.659

Una cadena de números primos de Cunningham es una secuencia en la cual cada primo es 1 más de dos veces el miembro anterior. D. N. Lehmer determinó que sólo había 3 cadenas de 7 primos cada una con el primer miembro menos de 10^7.

La cadena más pequeña es: 1.122.659 2.243.319 4.490.639 8.981.279 17.962.559 35.925.119 71.850.239 [Guy]

1.175.265

Junto con 1.438.983, el primer par de números impares amigables a ser descubiertos, por G. W. Kraft en el siglo XVII.

1.234.321

Igual a 1111^2. Por lo tanto, la tercera línea de este patrón:

$$121 \times (1 + 2 + 1) = 22^2$$

$$12321 \times (1 + 2 + 3 + 2 + 1) = 333^2$$

$$1234321 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1) = 4444^2$$

y así sucesivamente.

1.741.725

Igual a $1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$.

1.747.515

Junto con 2.185.095 el tercer par de números triangulares cuya suma y diferencia también son triangulares.

2.300.000

La primera inscripción en Europa que contiene un número muy grande se encuentra en la Columna Rostrata, un monumento erigido en el Foro Romano para conmemorar la victoria del 260 a.C. sobre los cartagineses. El símbolo de 100.000 se repitió 23 veces, un total de 2.300.000.

3.628.800

Igual a 10! y el único factorial que es el producto de otros factoriales consecutivos aparte de los triviales $1! = 0! \times 1!$, $2! = 0! \times 1! \times 2!$ y $1! \times 2! = 2!$.

$10! = 6! \times 7!$

10! también es igual a $3! \times 5! \times 7!$.

4,478,976

La solución no trivial más pequeña conocida de la ecuación $p^p \times q^q = r^r$ es $p = 12^6 = 2.985.984$; $q = 6^8 = 1.679.616$ y $r = 2^{11} \times 3^7 = 4.478.976$. [Le Lionnais]

4.729.494

El problema del ganado

4.729.494 se produce como coeficiente en el famoso problema ganadero atribuido a Arquímedes. El problema se refiere al número de cabezas de ganado del Sol, que se dividieron en 4 rebaños de diferentes colores, blanco leche, negro brillante, amarillo y moteado. 8 condiciones describen el número de toros y vacas en cada rebaño. En realidad, el texto es ambiguo; no está claro si un determinado número debe ser cuadrado o simplemente rectangular.

Si tiene que ser un cuadrado, entonces aparece esta ecuación:

$t^2 - 4729494u^2 = 1$

Tales ecuaciones se llaman Pellianas, en honor a John Pell, a quien Euler consideró que las había estudiado. Hay alguna evidencia de que realmente lo hizo, aunque Euler pudo haber confundido a Pell con Lord Brouncker.

Amthor calculó que las menores soluciones a esta ecuación son:

t = 109.931.986.732.829.734.979.866.232.821.433.543.901.088.049

u = 50.549.485.234.315.033.074.477.819.735.540.408.986.340

y que en este caso el número total de bovinos es un número de 206.545 dígitos, comenzando con 7766... Este número ha sido producido recientemente por computadora, por supuesto, tomando sólo 46 páginas y un poco de impresión.

Es poco probable que Arquímedes pudiera haber encontrado tal solución, aunque bien podría haber sabido cómo resolver este tipo de ecuación en principio, y estaba interesado en números muy grandes.

4.937.775

Números de Smith

Un número de Smith, definido por A. Wilansky como un número compuesto cuya suma de dígitos es igual a la suma de los dígitos de su factorización primaria, excluyendo 1.

4937775 = 3 × 5 × 5 × 65837 y los dígitos de cada expresión suman 42.

Los números de Smith pueden construirse a partir de repeticiones primarias. Denota el número cuyos dígitos son *n* unidades por R_n. Si R_n es primo, entonces 3304 × R_n es un número de Smith. 3304 no es el único multiplicador efectivo en esta construcción, sólo el más pequeño. No se sabe si existe un infinito número de tales multiplicadores, pero su uso es limitado de todos modos, ¡ya que los repunits primos parecen ser muy raros de hecho!

No se sabe si el conjunto de números de Smith es finito o infinito. Definitivamente sería infinito si existiera un número infinito de primos cuyos dígitos son todos ceros y unos, otro problema desafiante.

S. Oltikar and K. Wayland, 'Construction of Smith Numbers', *Mathematics Magazine*, vol. 56.

9.999.999

Los logaritmos originales de Napier no eran 'naturales', en base *e*, ni estaban explicitados en exponentes. Napier asignó al número 10.000.000 el logaritmo 0, y al número 9.999.999 el logaritmo 1. Multiplicando repetidamente por 9,999,999/10,000,000,000 construyó una secuencia de números con logaritmos 2, 3, ... y así sucesivamente.

En el apéndice de la traducción inglesa de 1618 de la obra original de Napier hay una tabla de logaritmos naturales, probablemente debido a William Oughtred que inventó las reglas de cálculo rectas y circulares.

John Wallis en 1685 y Johann Bernoulli en 1694 se dieron cuenta de que los logaritmos podían ser considerados como exponentes.

12.345.679

12.345.679	× 1 =	12.345.679	(número 8 faltante)
12.345.679	× 2 =	24.691.358	(número 7 faltante)
12.345.679	× 3 =	37.037.037	
12.345.679	× 4 =	49.382.716	(número 5 faltante)
12.345.679	× 5 =	61.728.395	(número 4 faltante)
12.345.679	× 6 =	74.074.074	
12.345.679	× 7 =	86.419.753	(número 2 faltante)
12.345.679	× 8 =	98.765.432	(número 1 faltante)
12.345.679	× 9 =	111.111.111	

Tenga en cuenta que en cada producto la secuencia 1 a 9, sin un dígito, puede leerse en ciclo a través del número, con un salto repetido adecuado. Por ejemplo, 61.728.395 pueden leerse como, 1 2 3 5

y dando vueltas de nuevo, 6 7 8 9

12.960.000

Este es el segundo Número Geométrico de Platón, asociado con 216, según muchos comentaristas. Se ha derivado de varias maneras, por ejemplo como 60^4 o como 4800×2700.

Había una tradición de un Gran Año de Platón, aunque Platón nunca lo menciona, de 36.000 años. A 360 días por año, 36.000 años ocupan 12.960.000 días.

24.678.050

Igual a $2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 + 5^8 + 0^8$.

33.550.336

Igual a $2^{12}(2^{13} - 1)$.

El quinto número perfecto, grabado por primera vez de forma anónima en un manuscrito medieval.

60.996.100

Igual a 7810^2 y un cuadrado compuesto de dos números consecutivos adyacentes, 6099 y 6100.

Las únicas otras soluciones de 8 dígitos son 9079^2 = 82.428.241 y 9901^2 = 98.029.801. [Kraitchik]

87.539.319

El número más pequeño que se puede representar como la suma de 2 cubos de 3 maneras diferentes:

87.539.319 = $167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255^3 + 414^3$

123.456.789

Cuando se multiplica por 8, se convierte en 987.654.312, invirtiendo claramente los dos últimos dígitos.

También permanece pandigital cuando se multiplica por 2, 4, 5 y 7.

Hay varios números que son pandigitales, incluyendo cero, y permanecen así cuando se multiplican por varios factores. Por ejemplo, 1.098.765.432 cuando se multiplica por 2, 4, 5 o 7.

139.854.276

Igual a 11.826^2.

El cuadrado pandigital más pequeño.

160.426.514

El número más pequeño que se puede representar de 2 maneras como la suma de 3 sextas potencias: $160.426.514 = 3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6$.

Se sabe que existe un número infinito de otras soluciones.

253.747.889

El primer caso del último teorema de Fermat, en el que el exponente p no divide x, y o z, ha sido resuelto para todos los p menores de 253.747.889.

272.400.600

La suma de las series armónicas, 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 +... tiende al infinito, pero muy lentamente.

Se necesitan 272.400.600 términos para aprobar 20. De hecho, la suma de los primeros 272.400.599 términos es aproximadamente 19,9999999 99979 y sumando 1/272.400.600 el total es aproximadamente 20,00000 00016.

Se necesitan aproximadamente $1,5 \times 10^{43}$ términos para superar los 100.

R. P. Boas y J. W. Wrench, *American Mathematics Monthly*, vol. 78, 1971.

275.305.224

El número de cuadrados mágicos de orden 5, finalmente calculados en 1973 sobre ordenador por Richard Schroeppel.

Este total excluye rotaciones y reflexiones.

Martin Gardner, *Scientific American*, enero de 1976.

0.429.315.678

Este número pandigital es igual a 3 productos pandigitales: 04.926 × 87.153; 07.923 × 54.186 y 15.846 × 27.093.

A. Gouffe, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 6.

438.579.088

Igual a $4^4 + 3^3 + 8^8 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + 0^0 + 8^8 + 8^8$.

El único otro número con esta propiedad es 3435.

455,052,511

El número de primos inferior a 10^{10}, calculado por D. N. Lehmer.

La tabla completa para el número de primos inferiores de potencias de 10 es:

10	4
10^2	25
10^3	168
10^4	1.229
10^5	9.592
10^6	78.498
10^7	664.579
10^8	5.761.455
10^9	50.847.534
10^{10}	455.052.511

635.318.657

El número más pequeño conocido, descubierto por Euler, que puede ser representado como la suma de 2 cuartas potencias de dos maneras: es igual a $59^4 + 158^4$ y $133^4 + 134^4$.

739.391.133

El número primo más grande en base 10 que puede ser ‘segado’ una y otra vez quitando su último dígito para producir sólo primos, terminando con 739, 73, 7.

923.187.456

El pandigital cuadrado más grande, si no se usa cero. Igual a 30.384^2.

987.654.321

Cuando se multiplica por 1, 2, 4, 5, 7 u 8, el resultado es pandigital, incluyendo el cero.

Tenga en cuenta también: 987.654.321 – 123.456.789 = 864.197.532.

1.111.111.111

El número Kaprekar más pequeño de 10 dígitos. Su cuadrado es: 1.234.567.900.987.654.321.

1.234.567.891

Uno de los 3 primos conocidos cuyos dígitos están en orden ascendente, comenzando con 1 y regresando de 9 a 1 o a cero cuando sea necesario. Los otros dos lo son: 12.345.678.901.234.567.891 y 1.234.567.891.234.567.891.234.567.891.

Joseph Madachy, *Journal of Recreational Mathematics*, vol. 10.

1.375.298.099

Igual a la suma de 3 quintas potencias de dos maneras: $24^5 + 28^5 + 67^5 = 3^5 + 54^5 + 62^5$. [R. Alter]

No se sabe si un número puede ser la suma de sólo 2 quintas potencias en más de una forma.

1.533.776.801

El tercer número que es simultáneamente triangular, pentagonal y hexagonal.

1,787,109,376

Uno de sólo 2 números automorfos de 10 dígitos, es decir, su cuadrado termina en los dígitos ...1.787.109.376.

De ello se deduce que cualquier número que se forme cortando los dígitos del frente también será automorfo. Por ejemplo, 109.376^2 termina en los dígitos ...109.376.

El otro automorfo de 10 dígitos es 8.212.890.625.

1.857.437.604

Un cuadrado, 43098^2, cuya suma de divisores es un cubo, 1729^3. [Bieler]

1.979.339.339

El primo más grande, de modo que cortar los dígitos del extremo derecho siempre deja un primo, contando 1 como primo.

Sólo un poco más pequeño, con la misma propiedad, es 1.979.339.333.

2.236.133.941

El primer primo en una secuencia de 16 primos en progresión aritmética. La diferencia común es de 223.092.870.

2.438.195.760

Este es pandigital y también divisible por cada número del 2 al 18. Kordemsky da otros 3 números con esta propiedad: 4.753.869.120; 3.785.942.160 y 4.867.391.520.

3.430.751.869

La segunda secuencia más larga conocida de primos en progresión aritmética comienza con este número y tiene 17 miembros, con una diferencia común de 87.297.210. El último primo en la secuencia es 4.827.507.229. [Guy]

4.294.967.297

El quinto número de Fermat, igual a $2^{2^5} + 1$, que Euler demostró ser compuesto, destruyendo así la conjetura de Fermat de que todos los números de esta forma son primos. Es igual a 641 × 6.700.417.

4.679.307.774

El único número conocido de 10 dígitos igual a la suma de las 10mas potencias de sus dígitos, descubierto por Harry L. Nelson. [Madachy]

8.212.890.625

Uno de dos números automorfos de 10 dígitos, el otro es 1.787.109.376.

9.814.072.356

El cuadrado más grande, 99066^2, que es pandigital, incluyendo el cero.

9.876.543.210

Restarle 0.123.456.789 y la respuesta es 9.753.086.421. Los 3 números son pandigitales con cero.

10.662.526.601

El único cubo palíndromo conocido, 2201^3, cuya raíz no es palíndroma.

Todas las cuartas potencias palíndromas conocidas tienen raíces palíndromas. No se conocen quintas potencias palíndromas.

15.527.402.881

La única cuarta potencia conocida que es la suma de sólo 4 cuartas potencias: $353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$.

18.465.126.293

Contando hacia arriba constantemente, el número de primos de la forma $4n + 3$ excede el número de primos de la forma $4n + 1$ para la mayoría de los primeros miles de millones de números.

La sexta y más grande región conocida para la que no lo es se extiende desde 18.465.126.293 hasta 19.033.524.538.

36.363.636.364

El cuadrado de este número, 1.322.314.049.613.223.140.496, está formado por dos 'mitades' idénticas.

Journal of Recreational Mathematics, vol. 14.

61.917.364.224

Igual a 144^5, y la suma de 4 quintas potencias. (*Ver 144*.)

100.895.598.169

Mersenne en una carta a Fermat en 1643 pidió la razón de $2^{36} \times 3^8 \times 5^5 \times 11 \times 13^2 \times 19 \times 31^2 \times 43 \times 61 \times 83 \times 223 \times 331 \times 379 \times 601 \times 757 \times 1201 \times 7019 \times 823543 \times 616318177 \times 100895598169$ a la suma de sus propios divisores.

Fermat respondió que los divisores suman 6 veces el número original y que los factores primos del último número, 100.895.598.169, son 112303 y 898423, siendo ambos primos.

Esta es una hazaña notable de factorización. De hecho, incluso la petición de Mersenne es notable dada la ausencia total de ayudas modernas para el cálculo.

Se han presentado varias teorías para explicar cómo lo hizo Fermat, y los matemáticos posteriores han mostrado varios métodos para encontrar los dos factores, sin llegar a ninguna conclusión convincente.

107.928.278.317

Primos en progresión aritmética

Este primo es el primero de 18 primos en progresión aritmética, 'rompiendo el récord anterior de 17 debido a Weintraub' como dice su descubridor Paul Pritchard. Los matemáticos parecen trabajar en torres de marfil, pero pueden ser tan competitivos como los atletas.

Los números 107.928.278.317 + k × 9.922.782.870 son todos primos para k = 0, 1... 17.

Una progresión aritmética de k primos tiene una diferencia común que es divisible por el producto de todos los primos menores o iguales a k, a menos que el primer primo en la progresión sea en sí mismo el k-ésimo primo.

En el ejemplo actual, $9922782870 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \times 31$.

P. A. Pritchard, 'Eighteen Primes in Arithmetic Progression', *Mathematics of Computation*, vol. 41.

158.753.389.900

Esta es la probabilidad de que tenga un juego completo en el Bridge.

608.981.813.029

Para todos los números pequeños N, los primos de la forma $3n + 2$ que son menores que N son más numerosos que los primos de la forma $3n + 1$, menores que N.

Se sabe que para una infinidad de valores de N, los primos $3n + 1$ son la mayoría.

¿Qué tan grande tiene que ser N para que esto suceda?

Esta es la respuesta, descubierta por Carter Bays y Richard H. Hudson el día de Navidad de 1976. ¿Era el único tiempo libre que tenían para usar la computadora?

La región se extiende desde 608.981.813.029 hasta 610.968.213.796.

'Details of the First Region of Integers x with $\pi_{3,2}(x)$ less than $\pi_{3,1}(x)$', *Mathematics of Computation*, vol. 32.

619.737.131.179

El número más grande tal que cualquier par de dígitos consecutivos es primo, y todos estos primos son diferentes.

Eureka, no. 40.

637.832.238.736

El segundo cuadrado palíndromo más grande con un número par de dígitos.

1.000.000.000.061

[13 dígitos] Junto con 1.000.000.000.000.063 un par de primos gemelos fáciles de recordar, aunque de ninguna manera el más grande conocido.

1.002.000.000.000

[13 dígitos] Según Plutarco, Xenocrates hizo de ésta la cantidad de sílabas que se podían formar a partir de las letras del alfabeto griego.

Si esta historia es cierta, entonces este es el primer intento registrado de resolver un problema difícil en combinaciones.

22.222.222.222.222

[14 dígitos] Un número de Kaprekar.

555.555.555.555.556

[15 dígitos] Un número de Kaprekar.

0.588.235.294.117.647

[15 dígitos] El período decimal de 1/17. Siendo de longitud máxima (16 dígitos incluyendo el cero), sus propiedades coinciden con las de 1/7. Por ejemplo, el período de 2/17 comienza 117647…

11.000.001.446.613.353

[17 dígitos] Los 653 números que siguen a este primo son todos compuestos. El siguiente primo es 11.000.001.446.614.007.

La brecha récord anterior entre los primos fue la dispersión de 651 números compuestos entre los primos 2.614.941.710.559 y 2.614.941.711.211.

S. Weintraub, *Mathematics of Computation*, vol. 36.

052.631.578.947.368.421

[17 dígitos] El período decimal de 1/19.

También puede construirse sumando las potencias de 2, ‘hacia atrás’:

$$\begin{array}{r} 1\\ 2\\ 4\\ 8\\ 16\\ 32\\ 64\\ 128\\ 256\\ \ldots\\ \ldots\ldots947368421 \end{array}$$

Siempre que un período decimal sea de longitud máxima, como aquí, entonces los períodos de las fracciones 1/*p*, 2/*p*, ... hasta (*p* – 1)/*p* pueden ser listados para hacer un cuadrado con sumas iguales en filas y columnas (página siguiente).

1/19 tiene la curiosa característica de sumar a la misma constante, 81, a lo largo de ambas diagonales también, y por lo tanto es verdaderamente mágico.

W. A. Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Dover, Nueva York, 1960.

1/19	·0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19	·1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19	·1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19	·2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19	·2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19	·3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19	·3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19	·4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19	·4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19	·5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19	·5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1
12/19	·6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19	·6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19	·7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19	·7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19	·8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
17/19	·8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19	·9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

$2^{58} + 1$

[18 dígitos] Este número fue factorizado por Landry en 1869. Comentó,

Ninguna de nuestras numerosas factorizaciones de los números $2^n \pm 1$ nos dio tantos problemas y trabajo como la de $2^{58} + 1$. Este número es divisible por 5 y si eliminamos este factor obtenemos un número de 17 dígitos cuyos factores tienen

9 dígitos cada uno. Si perdemos este resultado, perderemos la paciencia y el valor para repetir todos los cálculos que hemos hecho y es posible que pasen muchos años antes de que alguien más descubra la factorización de $2^{58} + 1$.

Menos de diez años después, Aurifeuille señaló que $2^{58} + 1$ pueden ser factorizados algebraicamente como $(2^{29} - 2^{15} + 1)(2^{29} + 2^{15} + 1)$.

Lucas generalizó este resultado a, $2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)$.

Tales factorizaciones se denominan ahora Aurifeuillianas.

Scripta Mathematica, vol. 128.

1.111.111.111.111.111.111

[19 dígitos]

Repunits

Un número cuyos dígitos son todas las unidades fue denominado 're-punit', abreviatura de unidad repetida, por Albert Beiler. El nombre se abrevia a R_n donde *n* es el número de unidades.

Así, $R_1 = 1$, y $R_2 = 11$, la menor de los repunits primos. El segundo primo repunit más pequeño es R_{19}, que es el número de esta entrada, como confirmará un cuidadoso recuento de los 1s. Fue descubierto en 1918 por uno de los lectores de la columna de rompecabezas del periódico de S. E. Dudeney.

Los únicos otros primos conocidos R_{23} y R_{317} y (casi con toda seguridad) R_{1031}. R_{317} fueron encontrados por H. C. Williams en 1978, después de que John Brillhart había anunciado erróneamente que era compuesto.

Williams está trabajando actualmente en la prueba de que el R_{1031} es primo, después de que las pruebas probabilísticas hayan demostrado que era primo 'casi seguro', sin proporcionar la completa certeza que los matemáticos desean.

Los repunits tienen una relación simple con las potencias de 10: $R_n = (10^n - l)/9$. Por esta razón el problema de descubrir cuáles repunits son primos y si es posible factorizar los otros es similar al problema de los números de Mersenne de la forma $2^n - 1$.

La primera de estas tablas fue publicada por William Shanks, el calculador de π, en 1874 como ayuda para encontrar un primo a partir de la duración del período de su recíproco decimal.

Todas las repeticiones de R_1 a R_{66} han sido completamente factorizados en primos. R_{67} y R_{71} y R_{79} son las primeras unidades cuya factorización aún no se ha decidido. R_{67} es divisible por 493121; R_{71} no tiene factor conocido y R_{79} tiene factores 317 × 6163 × 10271 × 307627.

Algunos primos con patrones curiosos aparecen como factores.

R_{38} = 11 × 909090909090909091 × 1111111111111111111

Este patrón surge de manera muy simple. 38 = 2 × 19, así que: 10000000000000000001 x 1111111111111111111 = R_{38} y como 19 es un número impar, 10000000000000000001 = 11 × 909090909090909091

Este patrón, o patrones como éste, pueden ser usados para desglosar todas los repunits indexados iguales. La pregunta es, ¿son estos factores gigantes en sí mismos primos?

Depende del número de dígitos. El midgit 9091 es un factor de R_{10} y 909091 divide R_{14} y 909090909090909090909090909091 divide R_{62}.

Para una variación, 9901 divide R_{12} y tanto 9901 como 99990001 dividen R_{24}, mientras que R_{39} es dividido por 900900900900990990990991.

La conexión con los recíprocos decimales radica en el hecho de que, por ejemplo, el período de 1/7 es 142857, por lo tanto, 142857 × 7 = 999999 = 9 × 111111 = 9 × R_6.

Trabajando hacia atrás desde la tabla, 7 es un factor de R_6; su período es por lo tanto 9 veces el producto de los otros factores = 9 × 3 × 11 × 13 × 37 = 142857.

Hay muchos primos sorprendentemente grandes cuyos recíprocos tienen períodos relativamente muy cortos. El período de 4649, sin los ceros iniciales, es sólo 3 × 3 × 239 = 2151. Puesto que 4649 divide R7, 1/4649 es en realidad 0,00021510002151...

Los repunits tienen muchas otras propiedades. Los repunits nunca son cuadrados. No se sabe si los repunits son cubos, o si existe un número infinito de primos de repunit.

R_p y R_q son coprimos si y sólo si p y q son coprimos.

En la base 9, cada repunit es también triangular. [G. W. Wishard]

Los cuadrados de repunits hacen un bonito patrón:

Por ejemplo:

$$1111^2 = 1234321$$

$$1111111111111^2 = 1234567900987654321$$

J. A. H. Hunter menciona que el siguiente cuadrado que termina en los mismos diez dígitos es:

$$2380642361^2 = 5667458050987654321$$

18.446.744.073.709.551.615 = $2^{64}-1$

[20 dígitos] Según una antigua leyenda, a Sissa ben Dahir se le ofreció una recompensa por el rey indio Shirham al inventar el juego de ajedrez. Sissa contestó con astucia, según lo relatado por Kasner y Newman:[42]

> 'Majestad, dame un grano de trigo para poner en el primer cuadrado, y dos granos de trigo para poner en el segundo cuadrado, y cuatro granos de trigo para poner en el tercero, y ocho granos de trigo para poner en el cuarto, y así, oh Rey, déjame cubrir cada uno de los 64 cuadrados de la tabla.'
>
> '¿Y eso es todo lo que deseas, Sissa, eres tonto?' exclamó el asombrado Rey.
>
> 'Oh, Señor —respondió Sissa—, he pedido más trigo del que tienes en todo tu reino, no, más trigo del que hay en todo el mundo, de cierto, suficiente para cubrir toda la superficie de la tierra hasta la profundidad de la vigésima parte de un codo'.

Una vigésima parte de un codo es aproximadamente una pulgada. Sissa pidió un total de $2^{64}-1$ granos de trigo. Resulta que este es el mismo número de movimientos que necesitan los sacerdotes del templo de Benarés para transferir los 64 discos de oro de la leyenda totalmente espuria creada alrededor del rompecabezas de la Torre de Hanói.

43.252.003.274.489.856.000

[20 dígitos] Igual a $\frac{8!\times 12!\times 3^8\times 2^{12}}{2\times 3\times 2}$

[42] *Mathematics and the Imagination*, Bell, 1959.

Este es el número total de posiciones que se pueden alcanzar en el Cubo de Rubik original de 3 por 3 por 3.

109.418.989.131.512.359.209

[21 dígitos] Igual a 9^{21}. Este es el número más grande de *n*-dígitos que también es una *n*-ésima potencia. [Friedlander]

$2^{67} - 1$

[21 dígitos] El número 67 de Mersenne, que según Mersenne era primo. F. N. Cole probó en 1903 que es compuesto.

Como recuerda E. T. Bell:[43]

> En la reunión de la American Mathematical Society celebrada en octubre de 1903 en Nueva York, Cole presentó un artículo, en el programa con el modesto título ‘Sobre la factorización de grandes cantidades’. Cuando el presidente le pidió su trabajo, Cole —que siempre fue un hombre de muy pocas palabras— se dirigió a la pizarra y, sin decir nada, procedió a apuntar la cuenta para elevar 2 a su 67° potencia. Luego restó cuidadosamente 1. Sin una palabra se movió a un espacio claro en el tablero y multiplicó, a mano alzada:
>
> $$193.707.721 \times 761.838.257.287$$
>
> Los dos cálculos coincidían... Por primera y única vez en la historia, una audiencia de la American Mathematical Society aplaudió enérgicamente al autor de un artículo presentado ante ella. Cole se sentó sin decir una palabra. Nadie le hizo una pregunta.

Bell le preguntó más tarde cuánto tiempo le había llevado encontrar esta factorización. Cole respondió: ‘Los domingos durante tres años’.

0.434.782.608.695.652.173.913

[21 dígitos] El período de 1/23, de duración máxima.

11.111.111.111.111.111.111.111

---

[43] Mathematics: *Queen and Servant of Science*, Londres, 1952.

[23 dígitos] El 23º repunit, y sólo el tercer repunit primo.

357.686.312.646.216.567.629.137

[24 dígitos] El número primo más grande en base 10 de tal manera que si lo decapitas una y otra vez los números resultantes son todos primos, terminando con la secuencia 9137, 137, 37, 7.

(0 se excluye como un dígito principal, porque es casi seguro que hay primos indefinidamente grandes de la forma $10^n + 3$, por ejemplo.)

I. O. Angell and H. J. Godwin, 'On Truncatable Primes', *Mathematics of Computation*, vol. 31.

2.235.197.406.895.366.368.368.301.560.000

[28 dígitos] La probabilidad de que los 4 jugadores en el Bridge reciban un palo completo. Como Martin Gardner señala enérgicamente, las afirmaciones de que los cuatro jugadores han recibido un palo completo son mucho más frecuentes que las afirmaciones de que dos jugadores lo han hecho, aunque esto último es mucho más probable.

1.786.772.701.928.802.632.268.715.130.455.793

[34 dígitos] Junto con 1.059.683.225.053.915.915.111.058.165.141.686.995, el inicio de una secuencia generalizada de Fibonacci en la que cada miembro es compuesto, aunque los dos primeros términos no tienen un factor común.

En otras palabras, formar una secuencia tomando estos dos números como u_1 y u_2 respectivamente y formar $u_3 = u_1 + u_2$; $u_4 = u_3 + u_2$; $u_5 = u_4 + u_3$, ... y así sucesivamente.

Esta es la secuencia Fibonacci generalizada más pequeña con esta propiedad. [Guy]

115.132.219.018.763.992.565.095.597.973.971.522.401

[39 dígitos] El mayor invariante digital pluperfecto conocido en base 10. Es igual a la suma de las 39 potencias de sus dígitos.

$2^{127} - 1$

[39 cifras] El 127° número de Mersenne.

Lucas, usando nuevos métodos, anunció en 1876 que M_{127} = 170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727 es primo. Más tarde expresó algunas dudas sobre este resultado, pero fue confirmado en 1914 por Fauquembergue.

Este número mantuvo el récord de ser el mayor primo conocido de todos los tipos por más tiempo que cualquier otro, desde 1876 hasta 1951. También fue el mayor primo que se descubrió sin el auxilio de las modernas herramientas de cálculo.

$180 \times (2^{127} - 1) + 1$

[41 dígitos] El mayor primo conocido en julio de 1951, descubierto por J. C. P. Miller y D. J. Wheeler de la Universidad de Cambridge en su EDS AC. Tenían una prueba para los números de la forma $k \times M_{127} + 1$ donde M_{127} es el número 127 de Mersenne. Este fue el mayor primo encontrado.

En el mismo mes, A. Ferrier, usando sólo una calculadora de escritorio, mostró la primacía de $(2^{143} + 1)/17$.

802.359.150.003.121.605.557.551.380.867.519.560.344.356.971

[45 dígitos] El primer número en la secuencia más grande conocida de primos de la forma p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$.

Journal of Recreational Mathematics, vol. 14, 3.

10^{51}

[52 dígitos]

The Sandreckoner

Arquímedes en su libro *The Sandreckoner*,[44] que destinó a Gelón, rey de Siracusa, describe su propio sistema de contar números inmensos. Comienza con la miríada, que era de 10.000, y cuenta hasta una miríada de miríadas que describen estos como números de primer orden.

Luego toma 1 miríada-miríada, o 100.000.000 en nuestra notación, para ser la unidad de los números de segundo orden... y continúa hasta que alcanza la miríada de miríadas de números.

¡Arquímedes no está en absoluto acabado! ¡Todos los números construidos hasta ahora son sólo los números del primer período! Continúa con su gigantesca construcción hasta que alcanza 'una miríada-miríada de unidades del orden miríada-miríadas del período miríada-miríadas'.

El número más alto en su notación se expresaría ahora como $10^{80.000.000.000.000.000}$

Luego propuso contar no sólo el número de granos de arena en una orilla del mar, o en toda la tierra, sino el número de granos de arena necesarios para llenar el universo entero.

Suponiendo que una cabeza de amapola contenga no más de 10.000 granos de arena, y que su diámetro no sea inferior a 1/40 de la anchura de un dedo, y suponiendo que la esfera de las estrellas fijas, que era para Arquímedes el límite del universo, fuera menos de 10^7 veces la esfera que contenía exactamente la órbita del sol como un gran círculo... el número de granos de arena necesarios para llenar el universo resulta ser, en nuestra notación, inferior a 10^{51}.

En comparación, Edward Kasner y James Newman al hablar de un googol, 10^{100}, estiman que el número de granos de arena en Coney Island es de 10^{20}.

Este extraordinario logro de Arquímedes es único en las matemáticas griegas. Los griegos generalmente no tenían ningún interés en los números fuera de algún contexto geométrico. Sin embargo, hacia el este, los matemáticos budistas indios construyeron inmensas 'torres' de números, que se elevaban en múltiplos de 10 o 100, para contar los átomos 'incluso en los 3 miles de miles de mundos contenidos en el universo'. Tal vez

[44] Contar arena.

Arquímedes se inspiró en estos logros indios para construir su propio sistema.

Véase T. L. Heath, *Works of Archimedes*, Dover, New York, n.d..

10^{63}

[64 cifras] Un vigintillion en palabras americano-inglesas (vigillion según un autor) y, según varios autores, el mayor número considerado por Arquímedes en *The Sandreckoner*.

El '3' extra surge porque un millón es 10^6 pero un billón es sólo 10^{12} y el vigintillion es por lo tanto 10 a la potencia $(3 \times 20) + 3$.

De manera similar, centillion es 10^{303}, y mediante combinaciones adecuadas de palabras que suenan en latín, se pueden expresar incluso mayores poderes de 10. 10^{366}, por ejemplo, es primo-vigesimo-centillion y - ¡espera! - milli-millillion es $10^{3000003}$

Milli-millillion puede ser una de las palabras menos usadas en el idioma inglés. Como comenta el autor del artículo, cito con desesperación: 'Los nombres de estos grandes números han sido tan poco necesarios que se pueden encontrar pocos lugares donde han sido escritos'.

En las obras de Jaina, alrededor del año 100 a.C., *koti* eran ciento-cien-mil, los ciento-cien-mil koti se llamaban *pakoti* y así sucesivamente hasta llegar a los *ankhyeya*, que representaríamos como 10^{140}.

$2^{229} – 1$

[69 dígitos] Euler probó que $2^{31} – 1$ es primo. Los números de Mersenne desde M_{32} hasta M_{257}, el valor más alto que Mersenne afirmó que era primo, no fueron finalmente comprobados hasta 1947, cuando H. S. Uhler, usando una calculadora de escritorio, finalmente probó que todos los M_{157}, M_{167}, M_{193}, M_{199}, M_{227} y este número, M_{229}, eran compuestos.

De hecho, el siguiente primo de Mersenne no aparece hasta $2^{521} – 1$. ¡Como señaló Uhler, cuando comenzó su trabajo no tenía idea de que el siguiente primo de Mersenne estaría tan lejos!

$2^{257} – 1$

[78 dígitos] Mersenne había conjeturado que este número es primo. M. Kraitchik demostró en 1922 que es compuesto, sin encontrar ningún factor real.

‘. . . . .’

[100 dígitos]

Factorización de grandes números aleatorios

¿Qué tan grande puede ser un número escogido al azar y factorizado dentro de un tiempo razonable, digamos en cuestión de horas, o a lo sumo, de días?

En 1659 Johann Rahn publicó una tabla de factores de números hasta 24.000.

J. P. Kulik (1773-1863) pasó 20 años de su vida recopilando una tabla de factores de hasta 100.000.000, de apenas 8 dígitos.

Cada dígito extra significa aproximadamente 10 veces más números a considerar. Con cada dígito extra, el tiempo y el esfuerzo necesarios para encontrar el factor de un número sin un patrón especial se multiplica. Sólo los números de formas especiales, como los números de Mersenne, $2^n - 1$, o los números de Fermat $2^{2^n} + 1$, pueden ser probados hasta límites mucho más altos.

Ya en 1943 un autor escribió, ‘...en el caso de números con quince dígitos o más, la prueba de un número de ser primo requeriría años, incluso si empleáramos todos los métodos conocidos que facilitan tal examen’.

Los métodos conocidos incluían calculadoras de escritorio y el tamiz electromecánico de Lehmer, pero no computadoras electrónicas.

En 1974 ya se disponía de ordenadores potentes y de pruebas más potentes, y era posible probar fácilmente números de 20 a 25 dígitos.

En 1980 Adleman y Rumely desarrollaron una prueba que decidía si un número escogido al azar de hasta 100 dígitos era primo en 4-12 horas con una computadora grande.

Esto ha sido mejorado por Cohen y Lenstra para que funcione unas 1000 veces más rápido. Ahora puede probar un número de 100 dígitos en unos 40 segundos en un superordenador, como el Control Data Cyber 170-750 o el CRAY.

El problema del factoreo de grandes cantidades se convirtió en un asunto de interés público y preocupación militar cuando, en 1975, Whitfield Diffie y Martin Heilman inventaron la función de trampilla, y poco después Rivest, Shamir y Adleman demostraron cómo hacer de ella una propuesta práctica.

Esta es una función matemática que cambiará cualquier número A en su número de código B. La función también tiene un inverso, que puede ser usado para calcular A de B. La belleza de su idea radica en la relación entre estas funciones. En la práctica, la función inversa no podía calcularse a partir de la función original.

¿Mata Hari ha perdido su libro de cifrado? ¿Lo ha conseguido un agente enemigo? ¿Ha estado interceptando todas sus transmisiones? ¿Está a punto de descubrir lo que ella ha estado diciendo? ¡No, no lo está! Las instrucciones de cifrado no le servirán de nada.

El corazón de la más simple de estas funciones es un número que es el producto de 2 primos grandes. El ejemplo de Rivest son dos primos de 63 dígitos. Estos se multiplican entre sí para crear un número de 125 o 126 dígitos. Todo lo que el agente enemigo tiene que hacer para leer la correspondencia privada de Mata Hari es tomar el número de 125/6 dígitos y convertirlo de nuevo en el producto de los números de 63 dígitos. Rivest estimó en 1977 que esto tomaría en una computadora de gran alcance cerca de 4×10^{16} años.

El problema de factorizar números muy grandes es sólo una de las muchas técnicas basadas en los llamados problemas NP, que comparten una característica común. Cada uno de ellos viene en diferentes tamaños, dependiendo del número de dígitos a factorizar, o del tamaño de la mochila a llenar exactamente, y el tiempo que toma resolverlos por computadora aumenta rápidamente a medida que aumenta el tamaño del problema.

Como resultado de un trabajo como el de Cohen y Lenstra, los números primos en el futuro tendrán que ser un poco más largos.

Martin Gardner, 'Mathematical Games', *Scientific American*, agosto de 1977; y Martin E. Heilman, 'The Mathematics of Public-key Cryptography', *Scientific American,* agosto de 1979.

10^{100}

El googol

Como lo describen Edward Kasner y James Newman, en *Mathematics and the Imagination*:[45]

> Un googol es este número que uno de los niños del jardín de infancia escribió en la pizarra:
> 1000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
> 0000000000000000000000000000000000000
>
> La definición de un googol es: 1 seguido de cien ceros. Se decidió, después de cuidadosas investigaciones matemáticas en el jardín de infancia, que el número de gotas de lluvia que caen sobre Nueva York en 24 horas, o incluso en un año o en un siglo, es mucho menor que un googol.

El niño, sobrino de 9 años del Dr. Kasner, sugirió el nombre *googol* para este número y *googolplex* para un número aún mayor, que se acordó que sería 1 seguido de un googol de ceros, o 10^{googol}.

Los autores escriben con previsión, desde hace un cuarto de siglo, que tal número podría ser de utilidad real en problemas combinatorios.

En contraste, el número total de partículas en el universo ha sido estimado en números desde 1072 hasta 1087.

$2^{521} - 1$

[157 dígitos] El decimotercer primo de Mersenne, llevando al decimotercer número perfecto.

En pocas horas de la noche del 30 de enero de 1952, utilizando el ordenador SWAC, Lehmer demostró que $2^{521} - 1$ y el número de 183 dígitos $2^{607} - 1$ son ambos primos de Mersenne.

Lehmer utilizó un teorema basado en una de las ideas de Lucas. Construye la secuencia:

---

[45] Bell, 1959.

4, 14, 194, 37634, ... en la que $s(1) = 4$ y $s(\mathrm{n} + 1) = s(n)^2 - 2$

Entonces el p-ésimo número de Mersenne es primo si y sólo si divide $s(p - 1)$.

11.111.111 ... 111.111

[317 dígitos (unos)] El cuarto y más grande de los repunits primos conocidos.

$2^{2281} - 1$

[687 cifras] El 12mo primo de Mersenne, $2^{127} - 1$, descubierto por Lucas, fue el primo más grande conocido desde 1876 hasta 1951 cuando el no-Mersenne $(2^{148} + 1)/17$ fue probado como primo por M. Ferrier.

Luego, en 1952, se descubrieron cinco grandes primos de Mersenne, de los cuales éste era el más grande.

$1159142985 \times 2^{2304} \pm 1$

[703 cifras] El par de primos gemelos más grande dado por Guy. Es, o mejor dicho, fue, o fueron, descubiertos por Atkin y Rickert en 1979. Al mismo tiempo encontraron el par: $694513810 \times 2^{2304} \pm 1$.

$2^{4253} - 1$

[1281 cifras] El decimonoveno primo de Mersenne, y el primero conocido en tener más de 1000 dígitos. Fue descubierto por Hurwitz en 1961 usando un IBM 7090.

$2^{8191} - 1$

[2466 cifras] M_{8191}, el 8191° número de Mersenne.

Catalan conjeturó que si p es un primo de Mersenne, entonces M_p será un primo. M_3, M_7, M_{31} y M_{127} son en efecto primos, si bien $8191 = M_{13}$, M_{8191} es compuesto. Esto fue probado por Wheeler en 1953 en el ILLIAC, en cien horas.

Las conjeturas de este tipo parecen ser las más fáciles de hacer en matemáticas y las que menos probabilidades tienen de tener éxito.

$2^{11213} - 1$

[3376 dígitos] El 23º primo de Mersenne, descubierto por Gillies en la Universidad de Illinois en 1963. La Universidad lo celebraba franqueando sus cartas con un matasellos especial.

$2^{19937} - 1$

[6002 cifras] El 24º primo de Mersenne, descubierto por Bryant Tuckerman en 1971.

$2^{21701} - 1$

[6533 cifras] El 25º primo de Mersenne, descubierto para deleite y asombro del público americano por dos estudiantes de 18 años, Laura Nickel y Curt Noll, en 1978.

$2^{23209} - 1$

[6987 cifras] El 26º primo de Mersenne, descubierto por Curt Noll en 1979 usando el mismo ordenador CDC-CYBER-174 en el que él y Laura Nickel habían encontrado el primo anterior.

Noll tardó más de 8 horas en comprobar este número en el CDC. Dos semanas después, David Slowinski utilizó un superordenador CRAY-1 para comprobar el resultado de Noll, ¡y el cálculo se acabó en 7 minutos!

Keith Devlin, *Microchip Mathematics*, Shiva Publications, 1984.

$2^{44497} - 1$

[13395 cifras] El 27º primo de Mersenne, descubierto por Harry Nelson y David Slowinski utilizando el superordenador CRAY-1 en abril de 1979.

$2^{65536} = 2^{2^{2^{2^{2}}}}$

[19729 cifras] Varias funciones han aparecido de forma natural en los últimos años en problemas combinatorios, que crecen asombrosamente rápido.

La función de Ackermann se define por $f(a,b) = f((a-1), f(a,b-1))$ donde $f(1,b) = 2b$ y $f(a, 1) = a$ para a mayor que 1.

$f(3,4) = 2^{65536}$, que tiene más de 19.000 dígitos. ¡Trate de imaginar el tamaño de $f(10,10)$ y mucho menos el de $f(100,100)$!

Como R. L. Graham dice de otra función que explosiona, ‘Es difícil comprender lo rápido que crece. Crece tan rápido que los números empiezan a perder su significado’.

Gina Kolata, ‘Does Gödel’s Theorem Matter to Mathematics?’, *Science*, 218.

$2^{86243} - 1$

[25962 cifras] Probablemente, pero no ciertamente, el 28º primo de Mersenne, cazado por David Slowinski en su fiel CRAY-1 en 1983.

Tiene unos modestos 25.962 dígitos decimales y el superordenador CRAY tardó 1 hora, 3 minutos y 22 segundos en comprobarlo, después de meses de trabajo preliminar para establecer que este número era probable que fuera primo.

Para dar una idea del cálculo, un Apple II realiza más de 250.000 instrucciones por segundo.

La serie de superordenadores CRAY se ocupa de instrucciones más complejas que la Apple, ya que todas sus operaciones son en coma flotante. El ‘punto flotante’ representa cada número en el ordenador en el equivalente binario de la notación científica estándar en la que, por ejemplo, la velocidad de la luz, 299.796 kilómetros por segundo, se escribe como $2{,}99796 \times 10^5$ kilómetros por segundo.

El CRAY utiliza 64 bits para representar un número, de los cuales 15 bits pueden representar el exponente.

Una operación de suma, resta, multiplicación o división cuenta como una instrucción. Un megaflop es 1 millón de instrucciones en coma flotante por segundo.

El CRAY-1 original se presentó a 150 megaflops. Los modelos más recientes llegan a más de 250, 500 o incluso 1000 megaflops. Cuando Seymour Cray saque al mercado su serie CRAY-3, tendrá como objetivo un rendimiento de 10 gigaflops, equivalente a 10.000 megaflops, o 10.000.000.000 de instrucciones en un segundo. ¡Piense en ello!

Mathematical Intelligencer, vol. 5.

$2^{132049} - 1$

[39751 dígitos] El segundo primo más grande conocido, y probablemente el 29º primo de Mersenne, descubierto por David Slowinski utilizando dos ordenadores CRAY-1 conectados entre sí, el 19 de septiembre de 1983.

$2^{216091} - 1$

[65050 dígitos] El mayor número primo conocido, descubierto por investigadores de Chevron Geosciences de Houston, Texas, mientras corrían en su nueva supercomputadora CRAY X-MP, que eventualmente será usada para buscar petróleo.

La noticia de que se había batido el récord fue transmitida al pueblo británico a las 7:30 de la mañana del 18 de septiembre de 1985 por la BBC Radio.

A 400.000.000 de cálculos por segundo, el X-MP tardó 3 horas en comprobar que este número era realmente primo, después de meses de trabajo para determinar que se trataba de un candidato plausible.

9^{9^9}

[369.693.100 cifras] El número más grande en notación decimal que se puede representar sin utilizar más de 3 dígitos, sin símbolos adicionales.

C. R. Laisant mostró en 1906 que este número tiene 369.693.100 dígitos. En 1947 H. S. Uhler calculó y publicó el valor de log 9^{9^9} con 250 decimales.

Horace Scuder Uhler, profesor de Física en la Universidad de Yale, dedicó gran parte de su tiempo libre al cálculo de una extraordinaria variedad de números matemáticos, tales como logaritmos, recíprocos, raíces, hasta un inmenso número de decimales. Le pareció relajante. El cálculo del log 9^{9^9} le pareció doblemente relajante… lo hizo entre pruebas de factores de números de Mersenne como el M_{157}, que mostró ser compuesto.

Mathematics Teacher, April 1953.

$10^{10^{10^{34}}}$

Número de Skewes

El número de primos menor o igual a *n* es aproximadamente $\int_0^n \frac{dx}{\log x}$. Para valores pequeños de *n*, en las decenas de millones, esta aproximación es una sobreestimación, pero no siempre es así. J. E. Littlewood probó en 1914 su famoso teorema de que pasa de ser una sobreestimación a una subestimación y vuelve a serlo un número infinito de veces, si, por supuesto, se llega lo suficientemente alto.

¿Qué tan alto? Skewes demostró en 1933 que el primer cambio se produce antes de que *n* alcance los $10^{10^{10^{34}}}$, aunque tuvo que asumir la verdad de la famosa hipótesis de Riemann.

En aquel momento era un número extraordinariamente grande. Hardy pensó que era ‘el número más grande que jamás ha servido a un propósito definido en matemáticas’, y sugirió que si una partida de ajedrez se jugaba con todas las partículas del universo como piezas, siendo uno de los movimientos el intercambio de un par de partículas, y la partida que terminaba cuando la misma posición se repetía por tercera vez, el número de partidas posibles sería aproximadamente el número de Skewes.

A modo de comparación, el número de partículas en el universo se ha estimado en los últimos años como un número insignificante de 10^{80} a 10^{87}.

El número de Skewes es eclipsado por muchos números que ahora aparecen en problemas en la combinatoria.

J. E. Littlewood, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, Londres, 1963; y R. P. Boas, The Skewes Number', en R. Honsberger, *Mathematical Plums*, Mathematical Association of America, 1979.

3↑↑↑3 etc., etc.

Número de Graham

El Campeón del Mundo como número más largo, listado en el último Libro Guinness de los Récords, es un límite superior, derivado por R. L. Graham, de un problema en una parte de la combinatoria llamada teoría Ramsey.

El número de Graham no puede expresarse usando la notación convencional de potencias y potencias de potencias. Si todo el material del universo se convirtiera en pluma y tinta no sería suficiente para escribir el número. En consecuencia, esta notación especial, ideada por Donald Knuth, es necesaria.

3↑3 significa '3 al cubo', como suele ocurrir en las impresiones de ordenador.

3↑↑3 significa 3↑(3↑3), o 3↑27, que ya es bastante grande: 3↑27 = 7.625.597.484.987, pero todavía es fácil de escribir, especialmente como una torre de 3 números: $3^{3^{3}}$.

3↑↑↑3 = 3↑↑(3↑↑3), sin embargo, es 3↑↑7.625.597.484.987 = 3↑(7.625.597.484.987↑7.625.597.484.987).

3↑↑↑↑3 = 3↑↑↑(3↑↑↑3), por supuesto. Incluso la torre de exponentes es ahora inimaginablemente grande en nuestra notación habitual, pero el número de Graham sólo comienza aquí.

Considere el número 3↑↑↑ … ↑↑↑3 en el que hay 3↑↑↑↑3 flechas. ¡Un número grande!

Luego construya el número 3↑↑↑ … ↑↑↑3 donde el número de flechas es el número anterior 3↑↑↑ … ↑↑↑3.

¡Un número increíble, inasible! Sin embargo, estamos a sólo dos pasos del gigantesco original 3↑↑↑↑3. Ahora continúe este proceso, haciendo que el número de flechas en 3↑↑↑ … ↑↑↑3 sea igual al número del paso anterior, hasta que usted tenga 63 pasos, sí, *sesenta y tres* pasos desde 3↑↑↑↑3. Ese es el número de Graham.

Hay un giro en la cola de este cuento de hadas. Recuerde que el número de Graham es un límite superior, igual que el número de Skewes. ¿Cuál será probablemente la respuesta real al problema de Graham? Gardner cita las opiniones de los expertos en teoría de Ramsey, quienes sospechan que la respuesta es: ¡6!

‘Mathematical Games’, *Scientific American*, November 1977.

Tablas

1 Los Primeros 100 Números Triangulares, Cuadrados y Cubos

	triangular	*cuadrado*	*cubo*
1	1	1	1
2	3	4	8
3	6	9	27
4	10	16	64
5	15	25	125
6	21	36	216
7	28	49	343
8	36	64	512
9	45	81	729
10	55	100	1000
11	66	121	1331
12	78	144	1728
13	91	169	2197
14	105	196	2744
15	120	225	3375
16	136	256	4096
17	153	289	4913
18	171	324	5832
19	190	361	6859
20	210	400	8000
21	231	441	9261
22	253	484	10648
23	276	529	12167
24	300	576	13824
25	325	625	15625
26	351	676	17576
27	378	729	19683
28	406	784	21952
29	435	841	24389
30	465	900	27000

31	496	961	29791
32	528	1024	32768
33	561	1089	35937
34	595	1156	39304
35	630	1225	42875
36	666	1296	46656
37	703	1369	50653
38	741	1444	54872
39	780	1521	59319
40	820	1600	64000
41	861	1681	68921
42	903	1764	74088
43	946	1849	79507
44	990	1936	85184
45	1035	2025	91125
46	1081	2116	97336
47	1128	2209	103823
48	1176	2304	110592
49	1225	2401	117649
50	1275	2500	125000
51	1326	2601	132651
52	1378	2704	140608
53	1431	2809	148877
54	1485	2916	157464
55	1540	3025	166375
56	1596	3136	175616
57	1653	3249	185193
58	1711	3364	195112
59	1770	3481	205379
60	1830	3600	216000
61	1891	3721	226981
62	1953	3844	238328
63	2016	3969	250047
64	2080	4096	262144
65	2145	4225	274625

66	2211	4356	287496
67	2278	4489	300763
68	2346	4624	314432
69	2415	4761	328509
70	2485	4900	343000
71	2556	5041	357911
72	2628	5184	373248
73	2701	5329	389017
74	2775	5476	405224
75	2850	5625	421875
76	2926	5776	438976
77	3003	5929	456533
78	3081	6084	474552
79	3160	6241	493039
80	3240	6400	512000
81	3321	6561	531441
82	3403	6724	551368
83	3486	6889	571787
84	3570	7056	592704
85	3655	7225	614125
86	3741	7396	636056
87	3828	7569	658503
88	3916	7744	681472
89	4005	7921	704969
90	4095	8100	729000
91	4186	8281	753571
92	4278	8464	778688
93	4371	8649	804357
94	4465	8836	830584
95	4560	9025	857375
96	4656	9216	884736
97	4753	9409	912673
98	4851	9604	941192
99	4950	9801	970299
100	5050	10000	1000000

2 Los Primeros 20 Números Pentagonales, Hexagonales, Heptagonales y Octagonales

	pentagonal	*hexagonal*	*heptagonal*	*octagonal*
1	1	1	1	1
2	5	6	7	8
3	12	15	18	21
4	22	28	34	40
5	35	45	55	65
6	51	66	81	96
7	70	91	112	133
8	92	120	148	176
9	117	153	189	225
10	145	190	235	280
11	176	231	286	341
12	210	276	342	408
13	247	325	403	481
14	287	378	469	560
15	330	435	540	645
16	376	496	616	736
17	425	561	697	833
18	477	630	783	936
19	532	703	874	1045
20	590	780	970	1160

3 Los Primeros 40 Números de Fibonacci

	Fibonacci
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765
21	10946
22	17711
23	28657
24	46368
25	75025
26	121393
27	196418
28	317811
29	514229
30	832040
31	1346269
32	2178309
33	3524578

34	5702887
35	9227465
36	14930352
37	24157817
38	39088169
39	63245986
40	102334155

4 Los Números Primos menores de 1.000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

5 Los Factoriales de los Números 1 a 20

0!	1
1!	1
2!	2
3!	6
4!	24
5!	120
6!	720
7!	5.040
8!	40.320
9!	362.880
10!	3.628.800
11!	39.916.800
12!	479.001.600
13!	6.227.020.800
14!	87.178.291.200
15!	1.307.674.368.000
16!	20.922.789.888.000
17!	355.687.428.096.000
18!	6.402.373.705.728.000
19!	121.645.100.408.832.000
20!	2.432.902.008.176.640.000

6 Los Recíprocos Decimales de los Primos del 7 al 97

1/7 =	142857...
l/11 =	09...
1/13 =	076923...
1/17 =	0588235294117647...
1/19 =	052631578947368421...
1/23 =	0434782608695652173913...
1/29 =	0344827586206896551724!37931...
1/31 =	032258064516129...
1/37 =	027...
1/41 =	02439...
1/43 =	023255813953488372093...
1/47 =	0212765957446808510638297872340425531914893617...
1/53 =	0188679245283...
1/59 =	0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661...
1/61 =	016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459...
1/67 =	0149253731343283582089552238805970I4925373134328358208955223880 597...
1/71 =	01408450704225352112676056338028169...
1/73 =	01369863...
1/79 =	0126582278481...
1/83 =	01204819277108433734939759036144578313253...
1/89 =	01123595505617977528089887640449438202247191...
1/97 =	0103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494 8453608247422680412371134020618556 7...

7 Los Factores de los Repunits de 11 a R_{40}

2	11
3	3, 37
4	11, 101
5	41, 271
6	3, 7, 11, 13, 37
7	239, 4649
8	11, 73, 101, 137
9	3, 3, 37, 333667
10	11, 41, 271, 9091
11	21649, 513239
12	3, 7, 11, 13, 37, 101, 9901
13	53, 79, 265371653
14	11, 239, 4649, 909091
15	3, 31, 37, 41, 271, 2906161
16	11, 17, 73, 101, 137, 5882353
17	2071723, 5363222357
18	3, 3, 7, 11, 13, 19, 37, 52579, 333667
19	1111111111111111111
20	11, 41, 101, 271, 3541, 9091, 27961
21	3, 37, 43, 239, 1933, 4649, 10838689
22	11, 11, 23, 4093, 8779, 21649, 513239
23	11111111111111111111111
24	3, 7, 11, 13, 37, 73, 101, 137, 9901, 99990001
25	41, 271, 21401, 25601, 182521213001
26	11, 53, 79, 859, 265371653, 1058313049
27	3, 3, 3, 37, 757, 333667, 440334654777631
28	11, 29, 101, 239, 281, 4649, 909091, 121499449
29	3191, 16763, 43037, 62003, 77843839397
30	3, 7, 11, 13, 31, 37, 41, 211, 241, 271, 2161, 9091, 2906161
31	2791, 6943319, 57336415063790604359
32	11, 17, 73, 101, 137, 353, 449, 641, 1409, 69857, 5882353
33	3, 37, 67, 21649, 513239, 1344628210313298373
34	11, 103, 4013, 2071723, 5363222357, 21993833369

35	41, 71, 239, 271, 4649, 123551, 102598800232111471
36	3, 3, 7, 11, 13, 19, 37, 101, 9901, 52579, 333667, 999999000001
37	2028119, 247629013, 2212394296770203368013
38	11, 909090909090909091, 1111111111111111111
39	3, 37, 53, 79, 265371653, 900900900900990990990991
40	11, 41, 73, 101, 137, 271, 3541, 9091, 27961, 1676321, 5964848081

Reprinted from *Contemporary Mathematics,* 1983, vol. 12, 'Factorizations of $b^n \pm 1$ $b = 2$, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 up to High Powers', John Brillhart, D. H. Lehmer, John L. Selfridge, Bryant Tuckerman, and S. S. WagstafT, Jr, by permission of the American Mathematical Society.

8 Los factores propios, cuando son compuestos, y los valores de las funciones φ(*n*), *d*(*n*) y σ(*n*)

n	Factores	$\varphi(n)$	$d(n)$	$\sigma(n)$
1	—	1	1	1
2	—	1	2	3
3	—	2	2	4
4	2^2	2	3	7
5	—	4	2	6
6	2, 3	2	4	12
7	—	6	2	8
8	2^3	4	4	15
9	3^2	6	3	13
10	2, 5	4	4	18
11	—	10	2	12
12	2^2, 3	4	6	28
13	—	12	2	14
14	2, 7	6	4	24
15	3, 5	8	4	24
16	2^4	8	5	31
17	—	16	2	18
18	2, 3^2	6	6	39
19	—	18	2	20
20	2^2, 5	8	6	42
21	3, 7	12	4	32
22	2, 11	10	4	36
23	—	22	2	24
24	2^3, 3	8	8	60
25	5^2	20	3	31
26	2, 13	12	4	42
27	3^3	18	4	40
28	2^2, 7	12	6	56
29	—	28	2	30
30	2, 3, 5	8	8	72
31	—	30	2	32
32	2^5	16	6	63

33	3, 11	20	4	48
34	2, 17	16	4	54
35	5, 7	24	4	48
36	2^2, 3^2	12	9	91
37	—	36	2	38
38	2, 19	18	4	60
39	3, 13	24	4	56
40	2^3, 5	16	8	90
41	—	40	*2*	42
42	2, 3, 7	12	8	96
43	—	42	2	44
44	2^2, 11	20	6	84
45	3^2, 5	24	6	78
46	2, 23	22	4	72
47	—	46	2	48
48	2^4, 3	16	10	124
49	7^2	42	3	57
50	2, 5^2	20	6	93
51	3, 17	32	4	72
52	2^2, 13	24	6	98
53	—	52	2	54
54	2, 3^2	18	8	120
55	5, 11	40	4	72
56	2^3, 7	24	8	120
57	3, 19	36	4	80
58	2, 29	28	4	90
59	—	58	2	60
60	2^2, 3, 5	16	12	168
61	—	60	2	62
62	2, 31	30	4	96
63	3^2, 7	36	6	104
64	2^6	32	7	127
65	5, 13	48	4	84
66	2, 3, 11	20	8	144
67	—	66	2	68

68	2^2, 17	32	6	126
69	3, 23	44	4	96
70	2, 5, 7	24	8	144
71	—	70	2	72
72	2^3, 3^2	24	12	195
73	—	72	2	74
74	2, 37	36	4	114
75	3, 5^2	40	6	124
76	2^2, 19	36	6	140
77	7, 11	60	4	96
78	2, 3, 13	24	8	168
79	—	78	2	80
80	2^4, 5	32	10	186
81	3^4	54	5	121
82	2, 41	40	4	126
83	—	82	2	84
84	2^2, 3, 7	24	12	224
85	5, 17	64	4	108
86	2, 43	42	4	132
87	3, 29	56	4	120
88	2^3, 11	40	8	180
89	—	88	2	90
90	2, 3^2, 5	24	12	234
91	7, 13	72	4	112
92	2^2, 23	44	6	168
93	3, 31	60	4	128
94	2, 47	46	4	144
95	5, 19	72	4	120
96	2^5, 3	32	12	252
97	—	96	2	98
98	2, 7^2	42	6	171
99	3^2, 11	60	6	156
100	2^2, 5^2	40	9	217

9 Los primeros 50 números primos y sus primoriales

n: *n*#

2: 2
3: 6
5: 30
7: 210
11: 2310
13: 30030
17: 510510
19: 9699690
23: 223092870
29: 6469693230
31: 200560490130
37: 7420738134810
41: 304250263527210
43: 13082761331670030
47: 614889782588491410
53: 32589158477190044730
59: 1922760350154212639070
61: 117288381359406970983270
67: 7858321551080267055879090
71: 557940830126698960967415390
73: 40729680599249024150621323470
79: 3217644767340672907899084554130
83: 267064515689275851355624017992790
89: 23768741896345550770650537601358310
97: 2305567963945518424753102147331756070
101: 232862364358497360900063316880507363070
103: 23984823528925228172706521638692258396210
107: 2566376117594999414479597815340071648394470
109: 279734996817854936178276161872067809674997230
113: 31610054640417607788145206291543662493274686990
127: 4014476939333036189094441199026045136645885247730
131: 525896479052627740771371797072411912900610967452630
137: 72047817630210000485677936198920432067383702541010310
139: 10014646650599190067509233131649940057366334653200433090
149: 1492182350939279320058875736615841068547583863326864530410
151: 225319534991831177328890236228992001350685163362356544091910
157: 35375166993717494840635767087951744212057570647889977422429870
163: 5766152219975951659023630035336134306565384015606066319856068810
167: 962947420735983927056946215901134429196419130606213075415963491270
173: 166589903787325219380851695350896256250980509594874862046961683989710
179: 29819592777931214269172453467810429868925511217482600306406141434158090
181: 5397346292805549782720214077673687806275517530364350655459511599582614290
191: 1030893141925860008499560888835674370998623848299590975192766715520279329390
193: 198962376391690981640415251545285153602734402721821058212203976095413910572270
197: 39195588149163123383161804554421175259738677336198748467804183290796540382737190
199: 7799922041683461553249199106329813876687996789903550945093032474868511536164700810
211: 1645783550795210387735581011435590727981167322669649249414629852197255934130751870910
223: 367009731827331916465034565550136732339800312955331782619462457039988073311157667212930

227: 83311209124804345037562846379881038241134671040860314654617977748077292641632790457335110
229: 19078266889580195013601891820992757757219839668357012055907516904309700014933909014729740190

Sobre el autor

David Wells nació en 1940. Tuvo la rara distinción de ser un erudito de Cambridge en matemáticas y reprobar su título. Posteriormente se formó como profesor y después de trabajar en ordenadores y máquinas de enseñanza enseñó matemáticas y ciencias en una escuela primaria y matemáticas en escuelas secundarias. Todavía está involucrado en la educación a través de la escritura y el trabajo con los maestros.

Mientras estaba en la universidad se convirtió en campeón británico de ajedrez sub-21, y a mediados de los setenta fue inventor de juegos, ideando ‘Guerilla’ y ‘Checkpoint Danger’, compositor de rompecabezas y editor de rompecabezas de la revista *Games and Puzzles*.

De 1981 a 1983 publicó *The Problem Solver*, una revista de problemas matemáticos para alumnos de secundaria. Ha publicado varios libros de rompecabezas y problemas, incluyendo *Recreations in Logic y Can You Solve These?* y también publica la revista *Studies of Meaning, Language and Change*. Actualmente está escribiendo un libro que compara la psicología de los rusos con la de Occidente.